

В. С. СОЛОМОНИК

СБОРНИК
ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ



В. С. СОЛОМОНИК

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

(ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ТЕХНИКУМЫ)

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

ББК 22.1

С60

УДК 511/514 (075)

Рецензент

канд. физ.-матем. наук М. И. Грабарь

Рекомендовано

Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве пособия для поступающих в техникумы на базе средней школы

Соломоник В. С.

С60 Сборник вопросов и задач по математике (для поступающих в техникумы): Учеб. пособие.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. школа, 1978.— 264 с., ил.

В пер.: 55 к.

Книга переработана в соответствии с новой программой для поступающих в техникумы. Она состоит из двух разделов: «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия». Включены новые понятия: множества, векторы, производная, интеграл и др.

Предназначается для лиц, поступающих в техникумы после окончания средней школы.

С 60601—506
001(01)—78 261—78

511/514
ББК 22.1

© Издательство «Высшая школа», 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Из предисловия к первому изданию	4
Основные обозначения	5

Раздел первый

Алгебра и начала анализа

Глава I. Множества	9
Глава II. Необходимые и достаточные условия	12
Глава III. Действительные числа	13
Глава IV. Одночлены и многочлены. Степени и корни	15
Глава V. Уравнения и неравенства	19
Глава VI. Функции и их графики	23
Глава VII. Квадратные уравнения	28
Глава VIII. Последовательности. Пределы. Производная	36
Глава IX. Прогрессии	40
Глава X. Логарифмы. Показательная и логарифмическая функция	44
Глава XI. Элементы комбинаторики. Формула Ньютона	53
Глава XII. Тригонометрические функции и их графики	56
Глава XIII. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства	70
Глава XIV. Первообразная и интеграл	72

Раздел второй

Геометрия

Глава XV. Начальные понятия геометрии	75
Глава XVI. Векторы	78
Глава XVII. Подобие и гомотетия. Теорема Пифагора	82
Глава XVIII. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике	86

Глава XIX. Площади многоугольников. Длина окружности и площадь круга	90
Глава XX. Параллельность в пространстве	96
Глава XXI. Перпендикулярность в пространстве. Двугранные и многогранные углы	98
Глава XXII. Многогранники	106
Глава XXIII. Фигуры вращения	116
Глава XXIV. Образцы экзаменационных билетов	123
Глава XXV. Вопросы и задачи для устных экзаменов	133
Ответы, указания и решения	140
Ответы к экзаменационным билетам	249
Ответы на вопросы и задачи к устным экзаменам	252
Формулы для справок	259
Словарь некоторых математических терминов	262

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание основательно переработано в соответствии с новой программой для поступающих в средние специальные учебные заведения и новой программой по математике, принятой в средней общеобразовательной школе.

В школьную математику повсеместно проник теоретико-множественный подход — каждое уравнение связывается с множеством его корней, функция рассматривается как отображение множеств, геометрические фигуры рассматриваются как множества точек и т. д. Все это отразилось в настоящей книге.

Включены новые разделы: множества, необходимые и достаточные условия, последовательности и их пределы, предел функции, элементы комбинаторики, конгруэнтность и перемещения, векторы, подобие и гомотетия, простейшие тригонометрические неравенства, производная и интеграл.

Поступающие в техникумы сдают лишь устные вступительные экзамены по математике, поэтому глава «Варианты письменных экзаменационных работ» исключена; вместо этого приведены вопросы и задачи «на соображение» для устного и полуписьменного решения, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

Для того чтобы пособием могли пользоваться и те учащиеся, которые изучали математику ранее по старым учебникам [например, учащиеся вечерних (сменных) школ], наряду с новыми терминами иногда приводятся и прежние.

В начале книги приведены обозначения, встречающиеся в новых учебниках по математике для средней школы, с которыми читатели встретятся в данной книге.

Автор выражает искреннюю признательность Кондратьевой Л. А. и Хлебниковой Н. Н., оказавшим большую помощь в его работе над этой книгой.

Москва

В. Соломоник

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Это пособие предназначено тем, кто окончил полную среднюю школу и готовится к вступительным экзаменам по математике на старшие курсы техникумов. Цель пособия — оказать помощь работающей молодежи, имеющей перерыв в учении, а также учащимся, слабо усвоившим математику; основные разделы ее повторяются в таком объеме, в каком это предусмотрено программой вступительных экзаменов*.

В этой книге изложен основной материал, требующийся для поступления в техникумы. В большинстве разделов приведены сперва краткие сведения по теории, с помощью которых можно ответить на следующие затем вопросы, выполнить упражнения и задачи. На большую часть вопросов и задач даны подробные ответы и решения. В необходимых случаях разобраны типичные ошибки, допускаемые поступающими в техникумы. Чтобы ознакомить поступающих с требованиями, предъявляемыми на устных и письменных экзаменах, приведены образцы билетов для устных экзаменов.

Надеемся, что эта книга будет полезна и учителям средней школы (здесь они смогут ознакомиться с требованиями на вступительных экзаменах), а также учащимся курсов по подготовке в техникумы.

Автор выражает глубокую благодарность Л. А. Кондратьевой, Г. Д. Глейзеру, М. И. Скнави и М. Н. Чернобельскому за ценные указания и помощь, оказанную в написании этой книги.

Просьба присылать свои замечания и отзывы по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Москва, 26 мая 1967 г.

Автор.

* Программа вступительных экзаменов для поступающих в средние специальные учебные заведения в 1978 году на базе полной средней школы (варианты А и Б). М., «Высшая школа».

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a > b$ — число a больше или равно числу b , или
число a не меньше числа b

$a < b$ — число a меньше или равно b , или число a
не больше числа b

$a > 0$ — число a неотрицательное

$M = \{a; b; c\}$ — множество M состоит из элементов a, b, c

$M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ — множество чисел x , которые являются кор-
нями квадратного уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\{a; b; c\}$ — упорядоченное множество из элементов $a,$
 b, c

$\emptyset$ — пустое множество

$\in$ — знак принадлежности

$x \in A$ — x есть элемент множества A , или x при-
надлежит множеству A

$X \in (AB)$ — точка X лежит на прямой AB , или прямая
 AB проходит через точку X

$x \notin M$ — x не есть элемент множества M , или x не
принадлежит множеству M

$X \notin [AB]$ — точка X не лежит на отрезке AB

- $A \subset B$ — множество A содержится в множестве B ,
 или A есть подмножество множества B , или
 множество B содержит множество A
 $a \subset \alpha$ — прямая a лежит на плоскости α , или пло-
 скость α проходит через прямую a
 $a \not\subset \alpha$ — прямая a не лежит на плоскости α
 $A \supset B$ — множество A содержит множество B
 $\alpha \supset a$ — плоскость α содержит прямую a , или пря-
 мая a лежит на плоскости α
 N — множество всех натуральных чисел
 Z — множество всех целых чисел
 Q — множество всех рациональных чисел
 R — множество всех действительных чисел, чи-
 словая прямая
 $[x]$ — целая часть числа
 $\{x\}$ — дробная часть числа
 $[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок), или мно-
 жество решений неравенства $a \leq x \leq b$
 $]a; b[$ — открытый промежуток (интервал), или мно-
 жество решений неравенства $a < x < b$
 $]a; b]$ — полуоткрытый интервал, или множество ре-
 шений неравенства $a < x \leq b$
 $[a; b[$ — полуоткрытый интервал, или множество ре-
 шений неравенства $a \leq x < b$
 $[a; +\infty[$ — числовой луч, или множество решений не-
 равенства $x \geq a$
 $] -\infty; a]$ — числовой луч, или множество решений не-
 равенства $x \leq a$
 $A \cap B$ — пересечение множеств A и B
 $A \cap B = \emptyset$ — множества A и B не пересекаются
 $A \cup B$ — объединение множеств A и B
 $|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x

$\Rightarrow$ — знак логического следования. Например,

$A \Rightarrow B$ — из истинности высказывания A следует истинность высказывания B

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности, например, $-2x >$

$6 \Leftrightarrow x < -3$ — неравенство $-2x > 6$ равносильно неравенству $x < -3$

$(x_n), (a_n)$ — бесконечная последовательность

$y = f(x)$ * — значение функции в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — множество значений функции f **

$[AB]$ — отрезок прямой с концами A и B

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B

$|AB|$ — длина отрезка AB

$\angle AOB$ — угол AOB

$\widehat{AOB}$ — величина угла AOB

$(a; b)$ — угол между прямыми a и b

$\cup AB$ — дуга AB

$\widetilde{AB}$ — величина дуги AB

$F_1 = F_2$ — фигуры F_1 и F_2 совпадают

$F_1 \cong F_2$ — фигуры F_1 и F_2 конгруэнтны

$F_1 \overset{k}{\sim} F_2$ — фигура F_1 подобна фигуре F_2 , коэффициент подобия равен k

H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом гомотетии k , или просто пишут H^k

R_O^α — поворот плоскости (луча, вектора) на угол α вокруг точки O . Если O — начало координат, то пишут просто R^α .

* Иногда пишут $x \xrightarrow{f} y$ — отображение множества x на множество y .

** Раньше говорили «область изменения функции».

Z_0 — центральная симметрия с центром O

$A_1 = S_l(A)$ — точка A_1 симметрична точке A относительно оси l

$T(X) = X_1$ — при параллельном переносе точка X переходит в точку X_1

$\overrightarrow{AB}$ — вектор AB

$\overrightarrow{a}$ — вектор a

$\overrightarrow{a}(X) = X_1$ — вектор $\overrightarrow{a}$ отображает точку X на точку X_1

$|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ — длина (модуль) вектора AB

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ — скалярное произведение векторов a и b

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

Первоначальные понятия

Множество — одно из первоначальных понятий математики; оно не определяется подобно понятиям «точка», «прямая», «число» и не сводится к другим понятиям математики. Для пояснения вместо слова «множество» часто применяют слова «собрание», «коллектив», «набор» и т. д.

1. Как называется 1) множество артистов, работающих в одном театре; 2) множество музыкантов, выступающих вместе; 3) множество цветов, стоящих в вазе; 4) множество точек плоскости, удаленных от данной точки O на расстояние r ; 5) множество точек плоскости, одинаково удаленных от сторон угла?

Предметы любой природы, составляющие множество, называются его *элементами*. Элементами множеств могут быть числа, буквы, атомы, точки, треугольники и т. д. Если элементами множества являются числа, то их называют *числовыми множествами*.

Множества обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы — малыми латинскими буквами. Запись $A = \{a; b; c\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c . Если элементов множества бесконечно много, то используют многоточие, например множество всех натуральных чисел записывается так: $N = \{1; 2; 3; \dots\}$. Однако при употреблении многоточия необходимо указать, что оно означает.

Если элемент a принадлежит множеству A , то пишут $a \in A$, что читается « a есть элемент множества A », или « a содержится в A ». Запись $a \notin A$ читают « a не есть элемент множества A », или « a не содержится в A ».

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым*; его обозначают $\emptyset$.

Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется *характеристическим* свойством множества.

Если, например, надо записать, что множество A состоит из всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $-2 < x < 3$, это записывается так:

$$A = \{x \mid -2 < x < 3\}.$$

2. Привести пример квадратного уравнения, множество корней которого является пустым. Тот же вопрос для системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

3. Выписать элементы множества, заданных характеристическим свойством:

1) $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$; 2) $A = \{x \in N, -2 < x < 7\}$;
3) $A = \left\{x \mid x \in Z, -4 \leq x \leq 1\frac{1}{3}\right\}$; 4) $A = \left\{x \mid 0 < x < 2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\right\}.$

4. Написать несколько чисел, принадлежащих множеству

$$A = \left\{x \mid x = \frac{2^n}{n^2 + 3}, n \in N\right\}.$$

Подмножества

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A , то говорят, что B есть подмножество в A , что записывается $B \subset A$ и читается «множество B содержится в множестве A », или пишут $A \supset B$ — читается «множество A содержит множество B ». Пустое множество является подмножеством всякого множества. Каждое множество является своим подмножеством $A \subset A$.

Примеры подмножеств: числовой отрезок $[-1; 5]$ есть подмножество числового отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, множество N всех натуральных чисел есть подмножество Z всех целых чисел ($N \subset Z$).

Множества A и B , состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными*, что записывается $A = B$. Например, множества $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 1; 3\}$ и $C = \{2; 3; 1\}$ равны.

5. В следующих примерах выписать буквы, обозначающие множества в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего:

1) A — множество всех четырехугольников, B — множество всех ромбов;

2) A — множество всех кубов, B — множество всех параллелепипедов, C — множество всех призм;

3) A — множество всех чисел, делящихся на 3, B — множество всех чисел, делящихся на 9, C — множество всех чисел, делящихся на 18;

4) N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, R — множество действительных чисел.

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют новое множество, содержащее те и только те элементы, которые одновременно входят как в множество A , так и в множество B . Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$.

Если A — множество точек круга O_1 , B — множество точек квадрата O_2 (рис. 1), то $A \cap B$ — множество общих точек этих фигур (пересечение множеств изображено двойной штриховкой).

Например, пересечение числового отрезка $[-1; 5]$ с числовым отрезком $[0; 6]$ есть числовой отрезок $[0; 5]$; это записывают так: $[-1; 5] \cap [0; 6] = [0; 5]$.

Если пересечение множеств A и B пусто, т. е. $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

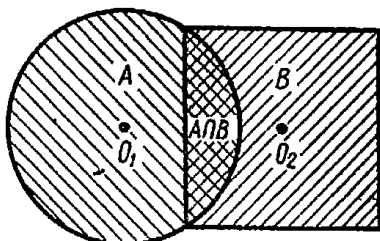


Рис. 1

6. Найти пересечение: 1) числового отрезка $[-\pi; \pi]$ с числовым отрезком $[-4; 2]$;

2) полуоткрытого промежутка $]-\sqrt{2}; 8]$ с отрезком $[-2; 5]$;

3) множества A — всех ромбов с множеством B — всех прямоугольников.

7. Где расположены множества точек, заданные системами неравенств:

$$1) \begin{cases} y \leq 4 - x^2, \\ y \geq x^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq 1 - x. \end{cases}$$

Объединение множеств

Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.

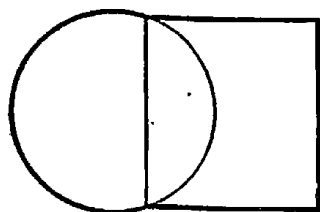


Рис. 2

Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. На рис. 2 объединением множеств точек круга и квадрата будет множество точек фигуры, ограниченной жирной линией.

8. Найти объединение множества A — всех натуральных решений неравенства $1 < x < 6$ и B — множества всех натуральных решений неравенства $4 \leq x < 8$.

9. Найти множества корней уравнений:

1) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$; 2) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = 0$;

$$3) (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 6x + 8) = 0; \quad 4) (x^2 - 8x + 12)^2 + (x^2 - 6x + 8)^2 = 0; \quad 5) (x^2 - 25)^2 + (x^2 - 4)^2 = 0; \quad 6) (x^2 - 25) \times (x^2 - 4) = 0.$$

ГЛАВА II

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Если из истинности высказывания A вытекает истинность высказывания B , то B называют *необходимым условием* (признаком) для A , а A — *достаточным условием* (признаком) для B , т. е. если $A \Rightarrow B$, то B — необходимое условие для A , A — достаточное условие для B .

Иначе можно сказать, что условие необходимо, если оно вытекает из заключения, т. е. если справедлива обратная теорема. Условие достаточно, если заключение вытекает из него, т. е. если справедлива прямая теорема*.

Например, в теореме «если углы смежные (высказывание A), то их сумма равна 180° (высказывание B)» наличие смежных углов является достаточным условием, чтобы их сумма равнялась 180° . В теореме «если число делится на 4 (высказывание A), то его последняя цифра делится на 2» (высказывание B) — делимость на 2 является необходимым условием делимости на 4.

Условие необходимо и достаточно, если справедлива прямая и обратная теорема.

10. В каждом из следующих предложений вместо многоточия поставить слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»:

1) для того чтобы натуральное число делилось на 6... чтобы оно делилось на 3;

2) для того чтобы натуральное число делилось на 3... чтобы оно делилось на 6;

3) для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом... чтобы $[AB] \parallel [CD]$;

4) для того чтобы произведение $(x - 2)(x + 2)$ было равно нулю... чтобы $x = 2$;

5) для того чтобы углы были конгруэнтны... чтобы они были вертикальными;

6) для того чтобы треугольник был прямоугольным... чтобы квадрат одной из его сторон равнялся сумме квадратов двух других его сторон;

7) для того чтобы было выполнено неравенство $\sin x > 0$... чтобы $0 < x < \pi$;

8) для того чтобы пирамида была правильной... чтобы ее основанием служил правильный многоугольник.

* Полезно помнить следующее правило: высказывание, стоящее на первом месте, является достаточным условием для второго высказывания, а высказывание, стоящее на втором месте, — необходимым условием для первого высказывания.

ГЛАВА III ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа

11. Что называется натуральным рядом чисел, натуральным числом?

12. 1) Какое число называется простым? 2) Какие числа называются взаимно простыми?

13. Что значит разложить число на простые множители?

14. Какое число называется наибольшим общим делителем (НОД) нескольких данных чисел?

15. Как найти НОД нескольких данных чисел? Привести примеры.

16. Какое число называется наименьшим общим кратным (НОК) нескольких данных чисел?

17. Как найти НОК нескольких данных чисел? Привести примеры.

Рациональные и иррациональные числа

18. 1. Какие числа называются рациональными; какой дробью можно изобразить всякое рациональное число? Привести примеры.

2. Какие числа называются иррациональными? Привести примеры.

19. Рационально или иррационально число 1) $\sqrt{a}$, если $a=0, 1, 2, 3, 4$; 2) $\sin \alpha$, если $\alpha=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$; 3) $\lg a$, если $a=1; 2; 10; 0,1; 0,2$?

Действительные числа

20. 1. Какие числа называются действительными?

2. Какой дробью можно изобразить всякое действительное число?

21. Какое множество чисел является дополнением множества: 1) натуральных чисел до множества целых чисел; 2) целых чисел до множества рациональных чисел; 3) рациональных чисел до множества действительных чисел.

22. Что называется модулем (абсолютной величиной) действительного числа? Верны ли равенства: а) $|-x|=x$; б) $|x|=-x$?

23. Изобразить на числовой прямой числа, удовлетворяющие условиям 1) $|a|=5$; 2) $|a|<3$; 3) $|a|>3$.

24. Найти модуль следующих чисел: 1) $\sqrt{5}$; 2) $2-3$; 3) $2-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}-2$; 5) $a-b$, если $a<b$; 6) $\sin x - \sqrt{2}$.

25. Чему равны выражения 1) $a+|a|$; 2) $a-|a|$; 3) $a\cdot|a|$; 4) $\frac{a}{|a|}$, если $a>0$; если $a<0$.

Целая и дробная части числа

26. 1. Что называется целой частью числа a ?
2. Что называется дробной частью числа a ?
3. Найти целую часть чисел а) 1,2; б) 38,17; в) $-6,7$; г) $-10,9$; д) $-0,8$.
4. Найти дробную часть чисел а) 8,16; б) 12; в) $-2,6$; г) $-\frac{5}{6}$.
5. Построить график функции $y=[x]$.
6. Построить график функции $y=\{x\}$.

Приближенные вычисления

27. Сформулировать правила округления чисел. Привести примеры.

28. Что называется погрешностью* приближенного значения числа?

29. Что называется относительной погрешностью приближенного значения числа?

30. 1. Как записать, что число 2,86 является приближенным значением числа x с точностью до 0,01? Указать границы, в которых заключено число x .

2. Как записать, что число a является приближенным значением числа x с точностью до h ?

31. Сколько десятичных знаков и значащих цифр в числах 1,6; 16; 0,16; 0,016; 0,106; 1,060?

32. Как записывают приближенные значения чисел? Привести примеры.

33. В записи приближенного значения числа x все цифры верные. Указать границу погрешности данного приближения, если а) 4,1; б) 4,10; в) 4,101; г) 4,100.

* Раньше погрешность приближения называли «абсолютной погрешностью».

34. Пользуясь правилами подсчета верных цифр, вычислить 1) $a+b+c$, где $a \approx 1,2$; $b \approx 12,243$; $c \approx 0,3761$; 2) $a-b-c$, где $a \approx 101,653$; $b \approx 8,7$; $c \approx 0,083$; 3) $a \cdot b$ и $\frac{a}{b}$, где $a \approx 3,6$; $b \approx 1,386$; 4) используя таблицу квадратов, найти значения выражения a^2 , если $a \approx 2,73$; $a \approx 64,7$; $a \approx 347$; 5) используя таблицу квадратных корней, найти значение выражения $\sqrt{a}$, если $a \approx 6,7$; $a \approx 8,59$; $a \approx 12,87$; $a \approx 209$; $a \approx 84,60$.

ГЛАВА IV

ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ. СТЕПЕНИ И КОРНИ

35. 1. Какие выражения называются одночленами?
 2. Что называется многочленом?
 3. Что называется степенью одночлена; многочлена?
 36. 1. Какое выражение называется многочленом n -й степени стандартного вида от одного переменного?
 2. Какие числа называются корнями многочлена?
 37. Найти корни многочленов:
 1) $x^3 - 9x$; 2) $x^4 - 1$; 3) $5a^3 - 10a^2 + a - 2$; 4) $a^3 + 3a^2 - 12a - 36$.

Степень

38. 1. Что называется степенью числа a , если показатель n — натуральное число?
 2. Как называются члены (компоненты) действия возведения в степень?
 39. 1. Сформулировать теоремы, выраженные равенствами

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m > n).$$

2. Сформулировать теоремы о возведении в степень а) произведения; б) дроби; в) степени. Написать эти теоремы в виде формул.

40. Вычислить: 1) $2^{13} \cdot (1,25)^{13} \cdot (0,4)^{13}$; 2) $(2,16)^5 : (1,08)^5$;
 3) $(0,25)^7 \cdot 4^8 + (0,75)^4 \cdot (0,4)^5 \cdot \left(3 \frac{1}{3}\right)^6$.

41. Доказать, что 1) $5 \cdot 4^{2n-3} - 20 \cdot (2^{n-2})^4 = 0$; 2) $54 \cdot 3^{n-6} + 15 \cdot 3^{n-4} - \frac{6^{n+1}}{2^{n+2}} = 3^{n-3}$.

42. 1. Что называется корнем n -й степени из данного числа a ($n \in \mathbb{N}$; $n > 1$)?

2. Сколько значений имеет корень n -й степени из a ?

Арифметический корень

Арифметическим корнем n -й степени из числа a ($a \geq 0$) называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a (n — натуральное число, большее 1).

Для арифметического корня n -й степени из числа a принято обозначение $\sqrt[n]{a}$; здесь n — показатель корня, a — подкоренное число, или подкоренное выражение; по этому определению $\sqrt[4]{81} = 3$, ибо $3 > 0$ и $3^4 = 81$ — верное равенство.

43. 1. В каком случае имеет смысл выражение $\sqrt[n]{a}$?

2. Какие значения может принимать выражение $\sqrt[n]{a}$?

3. Почему $(\sqrt[n]{a})^n = a$? Для каких значений a это равенство справедливо?

4. Всегда ли справедливо равенство $\sqrt{a^2} = a$?

5. Чему равно $\sqrt{(a-b)^2}$; $\sqrt[3]{(a-b)^3}$?

44. Упростить: 1) $\sqrt{(x-5)^2} - \sqrt{(1+5)^2}$, если $x < -5$;
2) $\sqrt{(4-a)^2} + 6 - a$ при $a > 4$; 3) $\sqrt{(y-x)^2} + \sqrt[4]{(x-y)^4}$.

Свойства арифметического корня n -й степени

1. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$, т. е. при любом натуральном $n > 1$ корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

2. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, т. е. при любом натуральном $n > 1$ корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

3. Если $a > 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$ (n и k — натуральные числа, большие 1).

4. Если $a > 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (здесь n , k и m — натуральные числа, причем $n > 1$), т. е. если показатель корня и показатель степ.

пени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится (основное свойство корня).

45. При каких значениях переменных верны равенства

1) $\sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5x^2} = -x\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{(2x+6)^2(1-x)} = (2x+6)\sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{(2x-4)^2(3-x)} = (4-2x)\sqrt{3-x}$; 5) $\sqrt{2a-1} \times$
 $\times \sqrt{5-a} = \sqrt{(2a-1)(5-a)}$; 6) $\sqrt{(a^2-1)^2} = a^2-1$.

46. Найти значение выражений

1) $\sqrt[4]{27 \cdot 48}$; 2) $\sqrt[8]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$;

3) $\sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}}$; 4) $\sqrt{7,3 \cdot 2,7} \left(\sqrt{\frac{7,3}{2,7}} - \right.$
 $\left. - \sqrt{\frac{2,7}{7,3}} \right) : \sqrt{(7,3+2,7)^2 - 4 \cdot 7,3 \cdot 2,7}$.

47. Вынести множитель за знак корня

1) $\sqrt[4]{16a^4b}$, где $a < 0$; 2) $\sqrt{12g^2}$, где $g < 0$.

48. Внести множитель под знак корня

1) $2\sqrt[3]{10}$; 2) $-2\sqrt{\frac{1}{8}}$; 3) $a\sqrt{2}$, где $a < 0$; 4) $x\sqrt[4]{3}$,

где $x < 0$.

49. Упростить выражения:

1) $\sqrt[6]{x^4}$; 2) $\sqrt[8]{x^6}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$, где $a \geq 0$; 4) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$;

5) $\sqrt[3]{x\sqrt[8]{x}}$, где $x \geq 0$.

50. Сравнить числа 1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ и $\sqrt[3]{4}$.

51. Преобразовать дробь так, чтобы знаменатель оказался рациональным

1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$; 4) $\frac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$; 5) $\frac{5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$.

52. Выполнить действия:

1) $\frac{9}{5-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{22}{7+\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \times$
 $\times \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$; 3) $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}} \right) :$

$$: \frac{8a\sqrt{a^3-b^3}}{b^3}; \quad 4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x+y}\sqrt{y}} \cdot \frac{x-\sqrt{xy+y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right);$$

$$: 4\sqrt{xy}; \quad (5) \cdot \left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}} \right); \left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}} \right); (6) a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1} : (a^2+1).$$

Степень с рациональным показателем

Число a , отличное от нуля, в нулевой степени равно единице, т. е. если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Возвести число a , отличное от нуля, в степень $(-n)$ — это значит разделить единицу на число a в степени n , т. е. если $a \neq 0$, то $a^{-n} = 1/a^n$. Если a — неотрицательное число, то степень числа a с дробным показателем m/n равна корню n -й степени из a , взятого в степени m , т. е. если $a \geq 0$, то $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

53. 1. Почему в приведенных определениях оговаривается, что основание степени должно быть отличным от нуля?

2. Вывести формулу $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$.

54. Вычислить:

1) $\frac{7^3 \cdot 49^{-2} \cdot 5^4 + 49 \cdot 125 \cdot (1/5)^{-1}}{(7 \cdot 5)^4 \cdot 7^{-3}}$; 2) $4^{3/2} + 27^{2/3} - 289^{1/2}$;
 3) $8^{2/3} + 25^{1/2} + 256^{1/4} + (1/81)^{-3/4}$; 4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 81^{0,25} -$
 $- 8^{-1\frac{1}{3}} + (0,65)^0 - \left(1\frac{1}{15}\right)^{-1}$; 5) $[(4/5)^{-3}]^{-2/3} \cdot 1,25^{-1}$.

55. Упростить выражения:

1) $\frac{x^{-1} - 27a^2x^{-4}}{x^{-1} + 3ax^{-2} + 9a^2x^{-3}}$; 2) $(0,5)^{0,5} \cdot (8x^2)^{0,5}$; 3) $(3,2a^6)^{0,2}$;
 $: (0,1a)^{0,2}$; 4) $\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{-2/3} - (0,5)^{-0,5} \right] \cdot \left[\left(2\sqrt{2}\right)^{-2/3} + \right.$
 $\left. + (0,5)^{-0,5} \right]$; 5) $\frac{a-b}{a^{1/2} - b^{1/2}} - \frac{a-b}{a^{1/2} + b^{1/2}}$; 6) $\left(\frac{a-x}{a^{1/3} - x^{1/3}} - \right.$
 $\left. - \frac{a+x}{a^{1/3} + x^{1/3}} \right) \cdot (ax)^{-1/3}$; 7) $\left(\frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right) \times$
 $\times \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$; (8) $\left(\frac{49}{a+27} - \frac{a^{1/3} + 3}{a^{2/3} - 3a^{1/3} + 9} \right) \cdot \frac{a^{4/3} + 27a^{1/3}}{16 - a^{2/3}} + \frac{40 - a^{2/3}}{4 + a^{1/3}}$;
 (9) $\frac{1 - a^3\sqrt{a} + a - \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{a^2}} + \frac{1}{(a^{1/3} - a^{2/3})^{-1}}$.

56. Упростить и найти числовые значения выражений:

- 1) $((a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}))^{-1}$ при $a=4,5$; $b=2,5$; 2) $\frac{a^{-0,5} b^{-0,6} - a^{-2,5} b^{1,4}}{a^{-1,5} b^{0,4} - a^{-2,5} b^{1,4}}$ при $a=\sqrt[3]{0,064}$, $b=0,8$; 3) $\frac{x^{1,5} y^{-0,5} - 4x^{-2,5} y^{1,5}}{x^{-0,5} y^{0,5} - 2x^{-2,5} y^{1,5}}$ при $x=\sqrt{0,1}$, $y=0,04$;
4) $((\sqrt[4]{a^3} + a) : (\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{a}) - \sqrt[3]{a^2}) : (1 - \sqrt[12]{a})$ при $a=\sqrt{3}$.

ГЛАВА V УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Тождества и уравнения

57. 1. Какие два выражения называются тождественно равными?

2. Какое равенство называется тождеством? Привести примеры.

58. 1. Что называется уравнением с одной переменной? *

2. Что называется корнем (решением) уравнения?

3. Что значит решить уравнение?

59. Какие уравнения называют эквивалентными (равносильными)?

60. Сформулировать два основных свойства уравнений. Когда пользуются этими свойствами при решении уравнений?

61. Равносильны ли уравнения:

- 1) $x - 2 = 0$ и $(x - 2)(x + 3) = 0$; 2) $x^2 - 2x = 0$ и $x - 2 = 0$;
3) $x - 4 = 3$ и $x - 4 + \frac{1}{x-7} = 3 + \frac{1}{x-7}$.

Линейные уравнения

Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — действительные числа, а x — переменная, называется *линейным уравнением*.

62. Решить следующие уравнения с переменной в знаменателе:

1) $\frac{1}{2x-1} - \frac{5}{x} = \frac{3}{x(2x-1)}$; 2) $\frac{x^2}{4-x^2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{6}{x+2}$.

* Раньше говорили: «с одним неизвестным».

63. При каких значениях a и b корень линейного уравнения $ax+b=0$: 1) равен нулю; 2) отрицателен; 3) положителен?

64. В каких случаях линейное уравнение $ax+b=0$ 1) не имеет корней; 2) имеет бесконечное множество корней; 3) имеет единственный корень?

65. Решить уравнения относительно x :

1) $(a^2 - 9)x = a + 3$; 2) $(a^2 - 4)x = 3a^2 + a - 10$;

3) $\frac{x}{a-3} - \frac{1}{a} = \frac{6+4x}{a^2-3a}$.

66. Решить графически уравнения:

1) $2x+3=0$; 2) $2x=6$; 3) $3x=0$; 4) $2x-2=1-x$.

Системы линейных уравнений с двумя переменными

Линейным уравнением с переменными x и y называется уравнение вида $ax+by=c$, где a , b и c — действительные числа. График этого уравнения есть прямая линия. Если $b \neq 0$, то угловой коэффициент этой прямой $k = -a/b$.

67. Каков общий вид системы двух линейных уравнений с двумя переменными?

68. 1. Что называется решением системы с двумя переменными; что значит решить ее?

2. Какие системы уравнений называются равносильными?

69. Решить системы сперва способом подстановки, а затем способом сложения

1) $\begin{cases} 7x+2y=17, \\ 2x-5y=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-y+7=0, \\ 4x+3y+17=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

70. Как установить, имеет ли система уравнений 3) в задаче 69 единственное решение, бесконечно много решений или не имеет решений?

71. Не решая следующих систем уравнений, определить, какая из них не имеет решений, имеет бесконечно много решений, имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+3y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ 3x+7,5y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+1,5y=7, \\ 2x+3y=14. \end{cases}$

72. 1. При каком значении a не имеет решений система $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x+ay=3? \end{cases}$

2. При каких значениях m и n имеет бесконечно много решений система $\begin{cases} 6x+my=8, \\ 18x+21y=2n? \end{cases}$

3. При каких значениях a система $\begin{cases} 3x+y=2a, \\ 6x+ay=4 \end{cases}$ имеет единственное решение; имеет бесконечно много решений?
4. Графики уравнений $\begin{cases} 2x+ky=2, \\ 2kx+y=2 \end{cases}$ параллельны. Найти k и построить графики.

Неравенства

73. 1. Что называется неравенством? Привести примеры тождественных неравенств и неравенств, содержащих переменные.
2. Верны ли неравенства $3 \geq 0$; $5 \geq 5$?
3. В каком случае справедливы неравенства $a > b$; $a < b$?

Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
3. Если $a > b$, то $a+c > b+c$.
4. Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$ и $a/m > b/m$.
5. Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$ и $a/m < b/m$.
6. Если $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$, то $1/a < 1/b$.

Действия над неравенствами

1. Если $a > b$ и $c > d$, то $a+c > b+d$.
2. Если $a > b$ и $c < d$, то $a-c > b-d$.
3. Если $a > b$ и $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.
4. Если $a > b$ и $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $a/c > b/d$.
5. Если $a > b$ и a и b — положительные числа, а $n \in N$, то $a^n > b^n$.
6. Если $a > b$ и a и b — положительные числа и $n \in N$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ — арифметические значения корней).

74. 1. Всегда ли $ac > bc$, если $a > b$?
2. Всегда ли $a^2 > b^2$, если $a > b$?
- 3) Что можно сказать о числах x и y , если а) $x/y > 0$; б) $x/y < 0$?
75. Дано, что $4 < a < 5$; оценить значение выражения 1) $0,1a$; 2) $-a$; 3) $5-a$; 4) $1/a$.
76. 1. Какое число называется средним арифметическим нескольких чисел?

2. Какое число называется средним геометрическим нескольких положительных чисел?

77. Доказать следующие неравенства:

- 1) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$); 2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ($a > 0, b > 0$); 4) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$; 5) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ ($a > 0, b > 0$); 6) $a^3 + 8 \geq 2a^2 + 4a$ ($a > 0$); 7) $a - 1 \leq a^2/4$; 8) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$).

Решение линейных неравенств с одной переменной

78. 1. Что значит решить неравенство?

2. Какие два неравенства называются равносильными?

3. На основании каких теорем о равносильности неравенств производится их решение?

79. Решить следующие неравенства:

- 1) $ax > b$; 2) $\frac{x-3}{-2} > 0$; 3) $\frac{-1}{5-2x} < 0$; 4) $\frac{x+2}{(x-3)^2} > 0$;
5) $(x+1)^2(x+3) > 0$; 6) $|x| > 3$, сначала найти целые решения; 7) $|x| < 4$; 8) $|5x-2| < 8$; 9) $|3x-4| > 5$; 10) $|x+2| \leq 6$; 11) $5x-7 < 3(x+1)$; 12) $\frac{16x+1}{7} > \frac{5x-4}{2}$;
13) $\frac{3,5x+2,5}{3} - \frac{3x-9}{2} > 8$.

80. Решить графически неравенства:

- 1) $2x > -3$; 2) $2x - 3 > 1$; 3) $2 - x < 3$.

Решение систем линейных неравенств с одной переменной

81. Из следующих систем трех неравенств одинакового смысла выбрать одно, являющееся решением системы:

- 1) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -\sqrt{3}, \\ x < -5. \end{cases}$

82. Найти множество решений системы неравенств:

- 1) $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x > 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -3, \\ x > -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq -2, \\ x > -4; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 3. \end{cases}$

83. Решить следующие системы неравенств:

$$1) \begin{cases} x < 7, \\ x < 5, \\ x > -2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 0, \\ x > 2, \\ x < 6; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 4, \\ x < 1, \\ x < -3. \end{cases}$$

84. Решить следующие системы неравенств:

$$1) \begin{cases} \frac{x+2}{3} < x+2,5, \\ 3x-2 > 3+0,5x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x+2}{8} < \frac{2-x}{7}, \\ x+5 < \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x}{8}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2 - \frac{1-2x}{3} > \frac{x+1}{4}, \\ \frac{x}{4} - \frac{7}{8} > \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}. \end{cases}$$

85. Решить следующие неравенства:

$$1) \frac{2x-4}{x+3} > 0; \quad 2) \frac{5-x}{x+2} > 0; \quad 3) \frac{2x-1}{x-2} < 0; \quad 4) \frac{1,5x+1}{x-1,5} > 2; \\ 5) \frac{3-2x}{x-4} < 1; \quad 6) 3(x-2)(2-5x) < 0; \quad 7) (x-4)(x+5) \times \\ \times (x+6)^3 (x+7)^2 > 0; \quad 8) \frac{1}{x} < 1; \quad 9) \frac{1}{x} > -1.$$

ГЛАВА VI ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Определение

Соответствие между множеством X и множеством Y , при котором каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества Y , называется функцией. Множество X называют областью определения, а множество Y — множеством значений функции.

Функцию с областью определения X и множеством значений Y называют также отображением множества X на множество Y .

Термины «функция» и «отображение» считаются синонимами — они выражают одно и то же понятие, но в алгебре больше говорят о функциях, а в геометрии — об отображениях.

В дальнейшем мы будем рассматривать функции, у которых область определения и множество значений состоят из действительных чисел. Такие функции называются *числовыми функциями*.

86. 1. Что значит задать функцию на числовом множестве?

2. Какими способами может быть задана функция?

3. Что называется графиком функции $y=f(x)$?

2. Какое число называется средним геометрическим нескольких положительных чисел?

77. Доказать следующие неравенства:

- 1) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$); 2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ($a > 0, b > 0$); 4) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$; 5) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ ($a > 0, b > 0$); 6) $a^3 + 8 \geq 2a^2 + 4a$ ($a > 0$); 7) $a - 1 \leq a^2/4$; 8) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$).

Решение линейных неравенств с одной переменной

78. 1. Что значит решить неравенство?

2. Какие два неравенства называются равносильными?

3. На основании каких теорем о равносильности неравенств производится их решение?

79. Решить следующие неравенства:

- 1) $ax > b$; 2) $\frac{x-3}{-2} > 0$; 3) $\frac{-1}{5-2x} < 0$; 4) $\frac{x+2}{(x-3)^2} > 0$;
5) $(x+1)^2(x+3) > 0$; 6) $|x| > 3$, сначала найти целые решения; 7) $|x| < 4$; 8) $|5x-2| < 8$; 9) $|3x-4| > 5$; 10) $|x+2| \leq 6$; 11) $5x-7 < 3(x+1)$; 12) $\frac{16x+1}{7} > \frac{5x-4}{2}$;
13) $\frac{3,5x+2,5}{3} - \frac{3x-9}{2} > 8$.

80. Решить графически неравенства:

- 1) $2x > -3$; 2) $2x - 3 > 1$; 3) $2 - x < 3$.

Решение систем линейных неравенств с одной переменной

81. Из следующих систем трех неравенств одинакового смысла выбрать одно, являющееся решением системы:

- 1) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -\sqrt{3}, \\ x < -5. \end{cases}$

82. Найти множество решений системы неравенств:

- 1) $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x > 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -3, \\ x > -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq -2, \\ x > -4; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 3. \end{cases}$

83. Решить следующие системы неравенств:

$$1) \begin{cases} x < 7, \\ x < 5, \\ x > -2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 0, \\ x > 2, \\ x < 6; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 4, \\ x < 1, \\ x < -3. \end{cases}$$

84. Решить следующие системы неравенств:

$$1) \begin{cases} \frac{x+2}{3} < x+2,5, \\ 3x-2 > 3+0,5x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x+2}{8} < \frac{2-x}{7}, \\ x+5 < \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x}{8}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2 - \frac{1-2x}{3} > \frac{x+1}{4}, \\ \frac{x}{4} - \frac{7}{8} > \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}. \end{cases}$$

85. Решить следующие неравенства:

$$1) \frac{2x-4}{x+3} > 0; \quad 2) \frac{5-x}{x+2} > 0; \quad 3) \frac{2x-1}{x-2} < 0; \quad 4) \frac{1,5x+1}{x-1,5} > 2;$$

$$5) \frac{3-2x}{x-4} < 1; \quad 6) 3(x-2)(2-5x) < 0; \quad 7) (x-4)(x+5) \times \\ \times (x+6)^3 (x+7)^2 > 0; \quad 8) \frac{1}{x} < 1; \quad 9) \frac{1}{x} > -1.$$

ГЛАВА VI

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Определение

Соответствие между множеством X и множеством Y , при котором каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества Y , называется функцией. Множество X называют областью определения, а множество Y — множеством значений функций.

Функцию с областью определения X и множеством значений Y называют также отображением множества X на множество Y .

Термины «функция» и «отображение» считаются синонимами — они выражают одно и то же понятие, но в алгебре больше говорят о функциях, а в геометрии — об отображениях.

В дальнейшем мы будем рассматривать функции, у которых область определения и множество значений состоят из действительных чисел. Такие функции называются *числовыми функциями*.

86. 1. Что значит задать функцию на числовом множестве?

2. Какими способами может быть задана функция?

3. Что называется графиком функции $y=f(x)$?

4. Как по графику функции найти ее область определения и множество ее значений?

5. Можно ли по виду графика узнать, является ли заданное им соответствие функцией?

6. Что называется корнем (нулем) функции? Как геометрически изображается корень функции?

7. Какая функция называется четной; нечетной? Какова особенность в расположении графиков этих функций?

8) В каком случае на данном интервале функция называется возрастающей; убывающей? Опишите движение точки по графикам этих функций.

9. Какая функция называется периодической? Что называется периодом функции?

10. Каким характерным свойством обладают графики периодических функций?

11. Какая функция называется обратимой?

12. Какие надо произвести преобразования, чтобы получить функцию, обратную для функции, заданной формулой (уравнением)? Привести примеры.

87. Найти области определения* следующих функций:

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{4-x}$; 3) $y = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y = \frac{3}{x^2+1}$; 6) $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; 7) $y = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$; 8) $y = \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{-x}$.

88. Найти множество значений** функций

1) $y = \frac{x+3}{x-4}$; 2) $y = x^2 + 5x + 6$; 3) $y = (-1)^x$ (x — целое).

89. Установить четность или нечетность следующих функций:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 2}$;
3) $f(x) = 2^x + 2^{-x} + 1$.

90. Задать формулой функцию, обратную данной:

1) $y = 2x$; 2) $y = 3x + 2$; 3) $y = x^2$, $x \geq 0$.

Функция $y = kx + b$

Функция вида $y = kx + b$, где k и b — данные числа, x и y — переменные, называется *линейной функцией*.

* Область определения функции f обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

** Множество значений функции обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Частным случаем линейной функции является прямая пропорциональность. Действительно, при $b=0$ функция $y=kx+b$ принимает вид $y=kx$.

Графиком линейной функции (рис. 3) является *прямая*, пересекающая ось ординат в точке $(0; b)$ и образующая с положительным направлением оси абсцисс угол α , тангенс которого равен k .

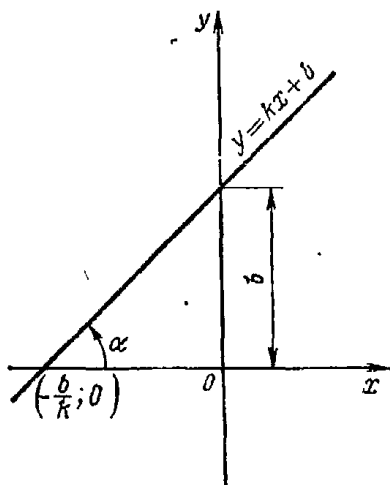


Рис. 3

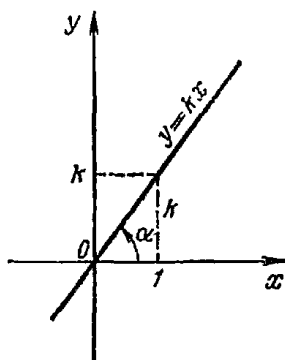


Рис. 4

Графиком функции $y=kx$ служит *прямая*, проходящая через начало координат и точку $(1; k)$ (рис. 4).

91. 1. Написать формулы из геометрии и физики, содержащие прямо пропорциональные величины.

2. Написать формулы из курса физики, содержащие величины, находящиеся в линейной зависимости.

3. Начертить схематически график прямой пропорциональности $y=kx$, если $k>0$, $k<0$ и $k=0$.

4. Ответить на те же вопросы для линейной функции $y=kx+b$.

92. Исследовать функцию $y=kx+b$: 1) указать область определения и множество значений; 2) найти корень; 3) найти промежутки знакопостоянства функции, т. е. определить, для каких значений аргумента функция положительна и для каких она отрицательна; 4) исследовать на возрастание и убывание; 5) можно ли считать эту функцию четной; нечетной?

93. Построить графики функций 1) $y=2x+3$; 2) $y=2-x$; 3) $y=-1,5x-2$; ответить для каждой из них на вопросы предыдущей задачи.

94. Как изменяется график линейной функции $y=kx+b$ 1) с изменением b при постоянном k ; 2) с изменением k при постоянном b ?

95. Построить графики следующих функций:

- 1) $y=|x|$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|$; 4) $y=-3|x|$; 5) $y=|x+2|$; 6) $y=|x|-2$; 7) $y=|x+2|$; 8) $y=|x-2|$; 9) $y=|x+1|+|x-1|$; 10) $y=|3-2x|$; 11) $y=3-|2x|$.

Функция $y=k/x$

Функция вида $y=k/x$, где $k \neq 0$ — данное число, выражает обратно пропорциональную зависимость. График этой функции — кривая, называемая *гиперболой* (рис. 5).

96. 1. Привести формулы из геометрии и физики, содержащие обратно пропорциональные величины.

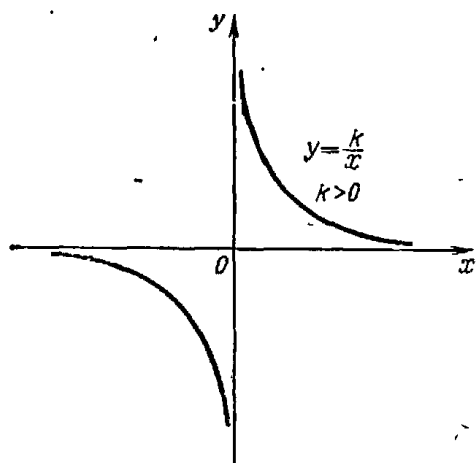


Рис. 5

2. Начертить схематически график функции $y=k/x$, если $k < 0$.

97. Пользуясь графиком функции $y=k/x$, исследовать ее, ответив на пять вопросов, поставленных для линейной функции (см. 92).

98. 1. Построить на одном чертеже графики функции $y=k/x$, если $k=6$; $k=1$. Как влияет величина коэффициента на форму графика?

2. Начертить график функции $y=-12/x$.

Пользуясь этим графиком, ответить на следующие вопросы. Как изменяется y , если а) $x \rightarrow 0$ справа, т. е. оставаясь положительным; б) $x \rightarrow 0$ слева, т. е. оставаясь отрицательным; в) построить график функции $y=-12/|x|$.

Функция $y=ax^2+bx+c$

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, где x — переменное, a, b, c — данные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией* или *квадратным трехчленом*. Графиком этой функции является *парабола* (рис. 6), вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$; ось

ее проходит через эту вершину и параллельна оси Oy ; ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$

99. 1. Привести примеры таких формул, в которых зависимость между переменными есть квадратичная функция вида $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2$.

2. Где в окружающей природе встречаются кривые, имеющие форму параболы?

100. Начертить графики функций $y = x^2$; $y = -x^2$ и, пользуясь ими, исследовать эти функции, ответив на пять вопросов, поставленных для линейной функции (см. 92).

101. Как из графика $y = x^2$ можно получить следующие графики:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2} x^2$;

3) $y = -x^2$; 4) $y = -2x^2$;

5) $y = ax^2$, если $a > 1$ и $a < 1$?

102. При помощи графика $y = x^2$ решить следующие уравнения и неравенства:

1) $x^2 = 3x + 4$; 2) $x^2 + 5x - 6 = 0$; 3) $x^2 < 3x + 4$; 4) $x^2 + x - 6 > 0$.

103. 1. Как из графика $y = ax^2$ получить графики а) $y = ax^2 + c$; б) $y = a(x + m)^2$; в) $y = a(x + m)^2 + c$; г) $y = -ax^2 + bx + c$.

2. Описать свойства квадратичной функции, ответив на вопросы 92.

104. Построить графики следующих функций:

1) $y = 2x^2 + 4x - 6$; 2) $y = 2x^2 + 10x + 7$; 3) $y = -2x^2 + 5x + 3$; 4) $y = |x^2 - 1|$; 5) $y = x^2 - 3|x| + 2$.

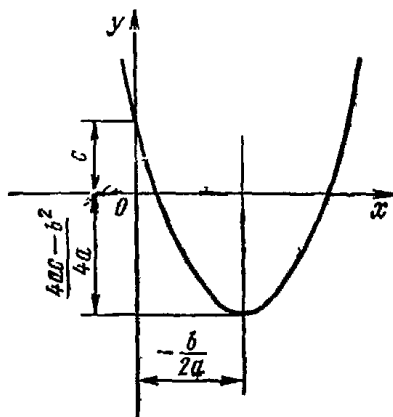


Рис. 6

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

105. Что служит графиком функции $y = x^n$, если 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 3$; 4) $n = 0$; 5) $n = -1$; 6) $n = -2$?

106. Перечислить основные свойства функции $y = x^n$, рассматривая ее график.

107. Решить графически уравнения 1) $x^3 = 2$; 2) $x^3 = -2$; 3) $x^{-1} = 0,5$; 4) $x^{-2} = 0,5$.

ГЛАВА VII КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение квадратных уравнений

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a , b и c — действительные числа, причем $a \neq 0$, а x — переменная, называется *квадратным уравнением*.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен единице, называется *приведенным*, его общий вид $x^2+px+q=0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ хотя бы один из коэффициентов, b или c , равен нулю, то квадратное уравнение называется *неполным*.

108. Решить неполные квадратные уравнения:

1) $ax^2+c=0$; 2) $ax^2+bx=0$; 3) $ax^2=0$; 4) $ax^2-1=0$.

109. Решить устно уравнения:

1) $x^2=x$; 2) $0,5x^2=8$; 3) $\frac{2}{3}x^2=24$.

110. 1. Найти положительное значение R из формул

1) $S=\pi R^2$; 2) $V=\pi R^2 H$.

2. Из формулы $S=\frac{gt^2}{2}$ выразить t через S и g .

Формулы корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad (1)$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}; \quad (2)$$

выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

Формулой (2) удобнее пользоваться, если b — четное число и, значит, $b/2$ — целое число.

Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два корня, которые могут быть найдены по формулам (1) и (2)

Если $D=0$, то уравнение имеет один корень, равный $-\frac{b}{2a}$ (иногда говорят, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных корня).

Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет корней. Кратко это можно выразить следующим образом:

$$D>0 \Rightarrow X = \left\{ \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \right\};$$

$$D=0 \Rightarrow X = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\};$$

$$D<0 \Rightarrow X = \emptyset.$$

111. Вычислить дискриминант и указать число корней следующих уравнений:

1) $x^2 + x + 1 = 0$; 2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - x - 20 = 0$.

112. При каком значении b уравнение $9x^2 + bx + 1 = 0$ имеет 1) один корень; 2) два корня; 3) не имеет корней.

113. Пользуясь формулой (1) решения квадратного уравнения, вывести формулы для нахождения корней уравнений 1) $ax^2 + bx = 0$; 2) $ax^2 + c = 0$.

114. Решить уравнения:

1) $x^2 - x - 12 = 0$; 2) $(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x-7)(x+7) = 11x + 30$; 3) $5(x+0,2)^2 - 7,2 = 0$; 4) $x^2 + 2ax - 2ab - b^2 = 0$; 5) $2x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} = 0$.

115. Дана квадратичная функция $y = x^2 + 7x + 12$.

1. Найти корни этой функции.

2. При каких значениях аргумента x она равна 6?

3. При каких значениях x эта функция и функция $y = x + 4$ принимают равные значения?

116. Решить уравнения:

1) $\frac{6}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = 3$; 2) $\frac{6}{4x^2 - 1} + \frac{3}{2x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = 1$;
3) $x + \frac{bx}{x - 2a} = \frac{2ab}{x - 2a}$.

Теорема Виета для квадратных уравнений

Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-b/a$, а произведение корней равно c/a , т. е. если x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то

$$x_1 + x_2 = -b/a; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

117. Чему равна сумма и произведение корней следующих уравнений:

1) $mx^2 - bx + c = 0$; 2) $x^2 - px + q = 0$; 3) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$; 4) $ax^2 + bx = 0$; 5) $ax^2 + c = 0$; 6) $ax^2 = 0$.

118. Решить устно следующие уравнения:

1) $x^2 - 8x + 12 = 0$; 2) $x^2 - 11x + 30 = 0$; 3) $x^2 + x - 6 = 0$;
4) $x^2 - x - 2 = 0$.

119. Сформулировать теорему, обратную теореме Виета.

120. Составить квадратное уравнение по данным его корням: 1) 2 и 7; 2) 0,5 и -10 ; 3) $1/4$ и $-1/5$; 4) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$; 5) 0 и $-\sqrt{3}$; 6) $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$.

121. Не решая уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$, вычислить: 1) сумму квадратов его корней; 2) сумму кубов его корней.

122. В уравнении $x^2 + bx - 12 = 0$ один из корней равен 3. Найти другой корень уравнения и b .

123. Составить квадратное уравнение, имеющее один положительный корень, а другой — равный нулю.

124. Исследовать знаки корней следующих уравнений: 1) $5x^2 + 13x + 8 = 0$; 2) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 3) $3x^2 + 8x - 4 = 0$; 4) $x^2 - 20x - 300 = 0$.

125. Каким должно быть число b , чтобы корни уравнения $x^2 + bx + 8 = 0$ были оба: 1) положительными, 2) отрицательными?

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 , то он может быть представлен в виде произведения: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Приведенный квадратный трехчлен раскладывается на два линейных сомножителя: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

126. 1. В чем различие между квадратными трехчленом $ax^2 + bx + c$ и левой частью квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

2. Что называют корнями квадратного трехчлена?

3. Как найти корни квадратного трехчлена?

4. Дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, представить этот трехчлен в виде произведения.

127. Найти корни следующих трехчленов и представить их в виде произведения:

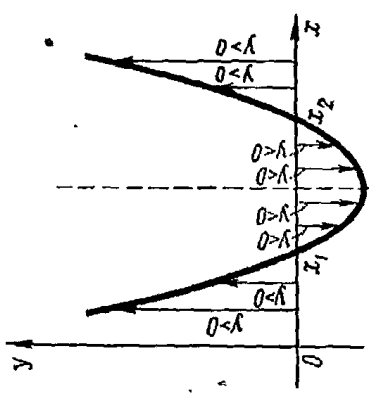
1) $x^2 - 17x + 60$; 2) $12x^2 - 17x + 6$; 3) $-6x^2 + 7x - 2$;
4) $3x - 2\sqrt{x - 1}$; 5) $2\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} - 3$.

Решение квадратных неравенств

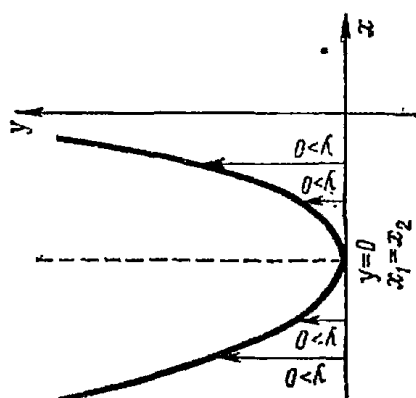
Квадратными неравенствами называются неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$. Полагаем $a > 0$; если $a < 0$, то надо предварительно обе части неравенства умножить на -1 , переменив при этом знак неравенства на противоположный.

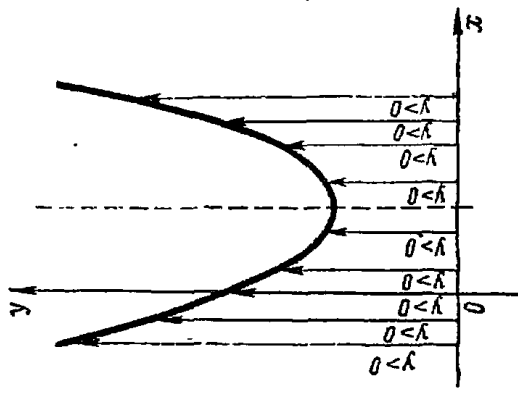
Квадратные неравенства можно решать аналитически, разложив их левые части на линейные множители или графически с помощью следующей таблицы.

Таблица 1

Дискриминант $D=b^2-4ac$	График функции $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)	Справедливость неравенства $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	Справедливость неравенства $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)
I случай $b^2-4ac>0$		Неравенство справедливо при $x < x_1$ и $x > x_2$	Неравенство справедливо при $x_1 < x < x_2$

Продолжение табл. I

Дискриминант $D=b^2-4ac$	График функции $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)	Справедливость неравенства $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	Справедливость неравенства $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)
II случай $b^2-4ac=0$		Неравенство справедливо при всех действительных значениях x , кроме $x=x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	Неравенство решений не имеет

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$	График функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	Справедливость неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	Справедливость неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)
III случай $a^2 - 4ac < 0$		Неравенство справедливо при всех действительных значениях x	Неравенство решений не имеет

128. Решить следующие неравенства:

- 1) $3x^2 - 7x - 10 > 0$; 2) $-x^2 + 4x - 5 > 0$; 3) $9x^2 - 24x + 16 > 0$; 4) $-x^2 + 2x - 5 < 0$; 5) $x^2 > 1$; 6) $x^2 - 2 < 0$; 7) $x^2 < x$; 8) $(x+3)(x+1)(x-4) > 0$; 9) $(x+3)(x+1)(x-3) \times (x-5) < 0$; 10) $x^3 > x$; 11) $x^4 > x$; 12) $x^5 > x$; 13) $\frac{(x-5)(x+2)}{x-3} > 0$; 14) $\frac{2x^2-50}{x^2-9x+18} < 0$.

Уравнения, приводимые к квадратным

Биквадратные уравнения

129. Решить следующие биквадратные уравнения:

- 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 - 15x^2 + 16 = 0$; 3) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; 4) $x^4 - (a+b)x^2 + ab = 0$.

130. Найти координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, содержащие переменную под знаком корня.

131. Почему, решив иррациональное уравнение, необходимо проверить, удовлетворяют ли найденные корни данному уравнению?

132. Почему следующие уравнения не имеют корней:

- 1) $\sqrt{x+5} = -3$; 2) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + 4 = 0$; 3) $\sqrt{x-5} + \sqrt{3-x} = 1$?

133. Решить следующие иррациональные уравнения:

- 1) $\sqrt{x+6} = 5$; 2) $3 + \sqrt{x-2} = 7$; 3) $\sqrt{4-x} = x+2$; 4) $\sqrt{x-2} = x-4$; 5) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$; 6) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x+4} = 5$; 7) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+5} = 3$; 8) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+1}$; 9) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+25}$; 10) $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{x+8}$; 11) $x + \sqrt{6 + \sqrt{x^2}} = 0$ при $x < 0$.

134. Решить следующие уравнения с помощью введения вспомогательного переменного:

- 1) $5x - 3\sqrt{x} = 14$; 2) $x^2 + 3 - \sqrt{x^2 + 3} = 2$; 3) $2x^2 + x +$

$$+\sqrt{2x^2+x+1}=5; \quad 4) \quad \sqrt[3]{(x+1)^3}-9\sqrt[3]{x+1}+8=0;$$

$$5) \quad \sqrt{\frac{x+3}{2x-1}}+\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}=\frac{5}{2}.$$

Решение систем уравнения второй степени

Система уравнений с двумя переменными x и y , в котором одно уравнение второй степени, а другое первой степени, имеет вид

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \\ mx+ny+p=0. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d, e, f, m, n и p — данные числа, причем a, b, c, m и n не могут одновременно равняться нулю.

Основной прием решения такой системы есть способ подстановки.

135. Решить следующие системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0, \\ 2x+y=3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2+y^2-3xy-x+y+9=0, \\ y-x=2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2-xy+y^2+2x-2y-3=0, \\ x+y=4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x+2y-xy=0, \\ 2xy+3(x-y)=5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x^2-5xy+3x+2y=10, \\ 2x^2-5xy-7x+8y=-10; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^2-xy+y^2=3; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ x+y=15. \end{cases}$$

136. Следующие системы уравнений решить особыми приемами:

$$1) \begin{cases} x+y=4, \\ xy=-12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+y=\frac{3}{2}a, \\ xy=\frac{1}{2}a^2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2+y^2=2a^2, \\ xy=-a^2; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x+y+xy=11, \\ 2(x+y)-xy=4. \end{cases}$$

137. Решить графически следующие системы уравнений:

$$1) \begin{cases} xy=4, \\ x+y=5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2-y=0, \\ x+y=6; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+y=0, \\ y-|x|=0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2+y=0, \\ 2x+y-4=0; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=-1. \end{cases}$$

ГЛАВА VIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ. ПРОИЗВОДНАЯ

Последовательности

138. 1. Что называется числовой последовательностью? Привести примеры последовательностей.

2. Написать первые пять членов последовательностей

$$\text{а) } a_n = \frac{3n+2}{n+1}; \text{ б) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \text{ в) } a_n = \begin{cases} 1/n & \text{при } n \text{ четном,} \\ (n-1)/n & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Пределы

139. 1. При каких условиях число a называется пределом последовательности (a_n) ?

2. Дана последовательность $a_n = n/(n+1)$. По заданному значению ε найти такой номер N , чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $|1 - a_n| < \varepsilon$, если $\varepsilon = 0,05$; $\varepsilon = 0,004$.

3. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{4n} = \frac{3}{4}$.

Теоремы о пределах числовых последовательностей

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся*, то

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Следствие. Постоянный множитель C можно выносить за знак предела, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot x_n) = C \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$.

4. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и предел последовательности (y_n) отличен от нуля, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

140. С помощью теорем о пределах найти пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5n+3}{n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n-1}{5n^2+3n+4}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n^2-1};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n-1)}{n^2+4}.$$

* Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися*.

141. 1. При каких условиях число b называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a ?

2. Проиллюстрировать на графике определение предела функции для а) $y=x^2$, если $x \rightarrow 2$; б) $y=\sin x$, если $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$.

Теоремы о пределах функций

Если при x , стремящемся к a , существуют пределы $f(x)$ и $g(x)$, то при x , стремящемся к a , существуют также пределы суммы, разности и произведения этих функций, при этом:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, т. е. постоянный множитель C можно выносить за знак предела.

3. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ существуют и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то существует предел частного f и g и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

142. При каких условиях функция f называется непрерывной в точке x_0 ?

143. Что вам известно о непрерывности 1) многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; 2) дробно-рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены?

144. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

Производная

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения $\Delta f(x_0)$ функции f в точке x_0 к приращению Δx при Δx , стремящемся к нулю, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

и более короткие записи:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}; \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной от данной функции называется дифференцированием этой функции.

145. Пользуясь определением производной, найти производные функций 1) $f(x)=1/x$; 2) $\varphi(x)=x^2+x+1$; 3) $h(x)=x^3-x^2$.

146. Каков механический смысл производной?

147. 1. Найти мгновенную скорость прямолинейного движения материальной точки, движущейся по закону $S(t)=t^2+3t+2$ (S — путь, м; t — время, с) а) в начальный момент времени; б) через 5 с после начала движения.

2) Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2-t$ (S — путь, м; t — время, с). Найти а) ускорение в момент $t=4$ с; б) момент времени t_0 , когда ускорение точки равно нулю.

148. Дать определение касательной к произвольной линии.

149. Как найти угловой коэффициент касательной к графику функции?

150. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$.

151. Написать уравнение касательных к параболе $y=x^2$ в точке с абсциссой 1) $x_0=1$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=3$; 4) $x_0=0$.

Производная постоянной и суммы двух функций

Производная постоянной равна нулю:

$$(C)'=0.$$

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют производные, то

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x).$$

Производная произведения и частного

Производная произведения двух функций u и v вычисляется по формуле

$$(uv)'=u'v+uv',$$

если производные u' и v' существуют.

Следствие 1. $(Cu)'=Cu'$, т. е. постоянный множитель C можно выносить за знак производной.

Следствие 2. Производная степенной функции $y=x^n$ с целым показателем n равна произведению показателя n на степень x^{n-1} , т. е. $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Можно доказать, что для любого рационального показателя r при $x>0$ $(x^r)'=rx^{r-1}$.

Если функции u и v имеют производные в точке x и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

152. Найти значения производных следующих функций в точке $x_0=0$:

- 1) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 12x$; 2) $\varphi(x) = (3x - 2)(5x^2 + 7x + 8)$;
3) $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

153. Решить уравнение $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = 8x - 3$, $g(x) = (x+2)(4x-5)$.

154. Сравнить $f'(1)$ и $g'(2,5)$, если $f(x) = \sqrt{x^3}$ и $g(x) = \frac{3x-4}{2x-1}$.

Теорема о возрастании и убывании функции

Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала $]a; b[$, то эта функция *возрастает* на этом интервале.

Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $]a; b[$, то эта функция *убывает* на этом интервале.

155. Найти промежутки монотонности (возрастания и убывания) следующих функций:

- 1) $f(x) = 5x - 2$; 2) $g(x) = 3x^2 - 12x + 5$;
3) $h(x) = x^3 - 12x$.

Теорема Ферма

Если точка x_0 является точкой экстремума* для функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Нужно помнить, что эта теорема есть лишь необходимое условие существования экстремума: из того, что производная в точке обращается в ноль, не обязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, на рис. 7 при $x=a$ $f'(a)=0$, но в этой точке функция не имеет экстремума

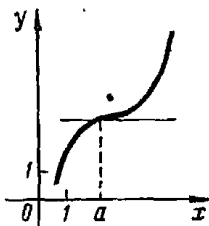


Рис. 7

* Точки минимума и максимума называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках называют *экстремумами функции*.

Достаточные условия существования экстремума

1. Если функция непрерывна в точке x_0 , $f'(x) > 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) < 0$ на интервале $]x_0; b[$, то x_0 является *точкой максимума* функции $f(x)$, или, короче, если производная в точке x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f'(x) < 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) > 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является *точкой минимума* функции $f(x)$, или если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

156. Найти критические точки* следующих функций, выяснив, какие из них есть точки максимума, а какие — точки минимума:

1) $f(x) = x^3 - 6x$; 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; 3) $h(x) = x^4 - 2x^2$.

157. Построить с исследованием графики следующих функций:

1) $y(x) = x^4 - 4x^2$; 2) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

ГЛАВА IX ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия

Принятые обозначения: a_1 — первый член, n — число членов, a_n — n -й член, d — разность, S_n — сумма членов.

158. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?

159. 1. Дана арифметическая прогрессия $a_1; a_2; a_3; a_k; a_{k+1}; \dots; a_{n-1}; a_n$. Как найти ее разность?

2. Какова разность у возрастающей прогрессии; у убывающей?

3. Известны второй член арифметической прогрессии a_2 и разность d . Найти a_1 и a_3 .

4. Все члены арифметической прогрессии увеличили на 25%. Будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

Формула общего члена арифметической
прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

160. 1. Прочитать и вывести полученную формулу. Из этой формулы выразить a_1 , d и n через остальные переменные.

* Это те точки, в которых производная равна нулю или не существует.

2. В чем заключается характеристическое свойство арифметической прогрессии?

3. При каком условии три числа a , b и c составляют три последовательных члена арифметической прогрессии?

4. Написать прогрессию, если $a_2=5$, $a_4=1$.

5. Найти десятый член арифметической прогрессии, у которой $a_1=1$, 2; $a_2=1$, 5;

6. Найти разность прогрессии, у которой 12 членов. Первый член равен 2, а последний 24.

7. Между числами 12 и 30 вставить 5 средних арифметических, т. е. таких чисел, которые с данными составили бы арифметическую прогрессию.

8. Для каких значений x числа 1, x и $11-x$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

9. Последовательность дана общим членом $a_k=10-3k$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

161. 1. Внутренние углы треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найти средний по величине угол.

2. Периметр треугольника равен 45 см. Числа, измеряющие его стороны, составляют арифметическую прогрессию. Найти второй член этой прогрессии. Написать несколько троек чисел, которые могут измерять стороны этого треугольника. При каких значениях d можно построить такие треугольники?

Формулы суммы членов арифметической
прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}; \quad (1) \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}. \quad (2)$$

162. 1. Сформулировать свойство членов арифметической прогрессии, которое используется для вывода формулы (1).

2. Сформулировать и доказать формулы (1) и (2).

163. 1. Найти сумму первых n натуральных чисел. Вычислить по этой формуле сумму натуральных чисел от 1 до 1000.

2. Найти сумму первых n нечетных чисел.

3. Найти сумму первых n четных чисел.

164. 1. Найти сумму 12 членов прогрессии 12; 15; 18;

2. Сколько надо взять членов прогрессии 18; 16; 14 ... чтобы их сумма равнялась нулю?
3. Сколько надо взять членов прогрессии 2; 5; 8; ... чтобы их сумма была бы больше 100?
4. Решить уравнение $1+6+11+\dots+x=148$.

Геометрическая прогрессия

Обозначения: n — число членов, u_1 — первый член, u_n — n -й член, q — знаменатель, S_n — сумма n членов.

165. 1. Какая последовательность называется геометрической прогрессией?
2. Дана прогрессия $u_1; u_2; u_3; \dots$. Найти q .
3. Какая геометрическая прогрессия называется возрастающей; убывающей?
4. Найти u_1 и u_3 , если известны u_2 и q .
5. Дано $u_3=3\sqrt{2}$, $u_4=3$. Найти u_2 и u_1 .

Формула общего члена геометрической прогрессии

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

166. 1. Прочитать и вывести написанную формулу. Из этой формулы выразить u_1 , q и n через остальные переменные, если $q > 0$, $n > 1$.
2. В чем заключается характеристическое свойство геометрической прогрессии?
3. При каком условии три числа a , b и c составляют геометрическую прогрессию?
4. Доказать, что значения $\lg \frac{\pi}{6}$, $\lg \frac{\pi}{4}$, $\lg \frac{\pi}{3}$ составляют геометрическую прогрессию?
5. Доказать, что числа $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ образуют геометрическую прогрессию.
6. В прогрессии $u_1 u_4 = 10$; найти $u_2 u_3$.
7. Найти пятый член геометрической прогрессии $\frac{1}{3}$;

$$\frac{\sqrt{3}}{3}; \dots$$

8. Между числами 1 и 256 вставить три средних геометрических, т. е. три таких числа, которые с данными составляли бы геометрическую прогрессию.

Формулы суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}; \quad (1) \qquad S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q}; \quad (1a)$$

$$S_n = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}; \quad (2) \qquad S_n = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q}. \quad (2a)$$

В этих формулах $q \neq 1$. Формулами (1) и (2) удобнее пользоваться, если $|q| > 1$, а (1a) и (2a) — если $|q| < 1$.

167. 1. Сформулировать и вывести написанные формулы.

2) Вычислить сумму следующих 10 членов прогрессии:

а) 1; 2; 2^2 ; ... и б) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

168. Три числа, составляющие возрастающую арифметическую прогрессию, дают в сумме 21. Если первый член оставить без изменения, второй член уменьшить на единицу, а третий увеличить на единицу, то вновь полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

169. Сумма трех чисел, составляющих убывающую арифметическую прогрессию, равна 39. Если из первого числа вычесть 4, из второго 5, а из третьего 2, то вновь полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

170. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 56. Если из них вычесть соответственно 1, 7 и 21, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ *

Суммой бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ называется предел суммы n ее первых членов при неограниченном возрастании n ($n \rightarrow \infty$), т. е.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots).$$

Эту сумму находят по формуле $S = \frac{u_1}{1 - q}$.

* Раньше ее называли суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

171. 1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии:

- 1) 8; 4; 2; ...; 2) $6; -2; \frac{2}{3}; \dots$; 3) $1; \frac{1}{1,2}; \frac{1}{(1,2)^2}; \dots$;
4) $\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2+1}}; \frac{3\sqrt{2-4}}{2}; \dots$; 5) $a; a^2; a^3; \dots$ $|a| < 1$;
6) $x^2; x^4; x^6; \dots$ $|x| < 1$.

172. Найти пределы выражений 1) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$;
2) $\sqrt{3\sqrt{6\sqrt{3\sqrt{6}\dots}}}$.

173. 1. Написать такую геометрическую прогрессию при $|q| < 1$, начинающуюся с единицы, чтобы сумма ее равнялась двум.

2. На сколько сумма членов бесконечной геометрической прогрессии 2; 1; 0,5; ... больше суммы первых пяти ее членов?

3. В треугольник, периметр которого 4 м, вписали другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Стороны нового треугольника снова разделены пополам; вписан новый треугольник и т. д. Определить сумму периметров этих треугольников.

4. В прямоугольном треугольнике ABC известны катет $CA = b$ и $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Из вершины C прямого угла опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AB . Из точки D опущен перпендикуляр DC_1 на катет BC . Из точки C_1 — перпендикуляр C_1D_1 на гипотенузу AB и т. д. Найти предел суммы $|CD| + |C_1D| + |C_1D_1| + \dots$ длин этих перпендикуляров.

174. С помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ выразить обыкновенными дробями следующие периодические дроби: 1) 0, (7); 2) 2, (15); 3) 0,1 (3); 4) 1,3 (27).

ГЛАВА X

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Определение логарифма

Логарифмом числа N по основанию a ($a > 0$ и $a \neq 1$) называется показатель степени x , в которую надо возвести основание a , чтобы получить N .

Из этого определения следует, что если $\log_a N = x$, то $a^x = N$, заменяя x на $\log_a N$, получим

$$a^{\log_a N} = N \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*; в нем дана краткая запись определения логарифма. Оно показывает, что $\log_a N$ — показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить N .

175. Заменить следующие логарифмические равенства равносильными показательными равенствами:

1) $\log_2 8 = 3$; 2) $\log_8 1 = 0$; 3) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; 4) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$;

5) $\log_a b = c$; 6) $\log_a M = x + y$; 7) $\log_a N = a$.

176. 1. Заменить следующие показательные равенства равносильными логарифмическими:

1) $2^{-2} = 0,25$; 2) $2^0 = 1$; 3) $27^{1/3} = 3$; 4) $0,9' = 0,5$.

2. В равенстве $N = N_0 e^{-kt}$ буквы N , N_0 , e и k — известные числа. Найти t .

177. Найти логарифмы следующих чисел:

1) $\log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; 3) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\log_2 \sqrt{2\sqrt{2}}$;

5) $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)$; 6) $\log_2 (\cos 0)$; 7) $\log_3 \left(\tg \frac{\pi}{3} \right)$; 8) $\log_3 (\log_3 27)$;

9) $\log_3^2 27$; 10) $\log_3 \log_2 (\log_3 4)$; 11) $\log_2^3 4$; 12) $\log_4 (\log_{16} 256) + \log_3 \sqrt[4]{3}$.

178. Вычислить:

1) $3^{\log_3 9}$; 2) $a^{\log_a M}$; 3) $7^{2 \log_7 3}$; 4) $5^{-2 \log_5 3}$; 5) $7^{\frac{1}{2} \log_7 2}$;

6) $5^{-\frac{1}{2} \log_5 4}$; 7) $\left(\frac{1}{3} \right)^{\log_3 7}$; 8) $\left(\frac{1}{9} \right)^{-2 \log_3 6}$; 9) $3^{1 + \log_3 11}$;

10) $5^{2 - \log_5 7}$; 11) $a^{\log_a (\log_3 16)}$; 12) $3^{2 - \log \sqrt[3]{2}}$;

13) $(\sqrt{2})^{\log_2 9 + 2}$; 14) $a^{\log \sqrt{a} + \log_a c}$.

179. Представить: 1) 2 в виде степени числа 3; 2) 10 в виде степени числа 5; 3) m в виде степени числа n .

Показательная функция

Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *показательной функцией*.

180. 1. Почему в определение показательной функции введены ограничения для a ?

2. Привести примеры явлений природы, в которых зависимость между переменными выражается показательной функцией.

181. Начертить график показательной функции и, пользуясь им, установить основные свойства этой функции 1) при $a > 1$; 2) при $0 < a < 1$.

182. 1. Что можно сказать о числах m и n , если $a^m = a^n$, где $a > 0$?

2) Какие из следующих функций являются возрастающими и какие убывающими при возрастании аргумента: $y = 3^x$; $y = 0,9^x$; $y = 0,5^x$; $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \pi^x$?

183. Что больше: 1) $(1,2)^{2/3}$ или $(1,2)^{3/4}$; 2) $5^{-1,6}$ или $0,2^2$; 3) $(0,6)^{-2 \frac{1}{3}}$ или $(0,6)^{-1 \frac{2}{3}}$; 4) m или n , если $0,5^m > 0,5^n$?

184. Сравнить с единицей 1) $(2/3)^{-4/5}$; 2) $(1,5)^{-0,5}$; 3) $(0,8)^{-0,6}$.

185. Начертить схематически графики следующих функций:

1) $y = 2^{1-x}$; 2) $y = 2^{x+1}$; 3) $y = 2^{1-x+1}$; 4) $y = (1/2)^{1-x}$.

Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ называется логарифмической функцией.

186. 1. Почему логарифмическую функцию $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называют обратной к показательной функции $y = a^x$?

2. Из формулы $M = M_0 a^t$, описывающей радиоактивный распад, выразить время t как функцию величины M/M_0 .

187. Начертить график логарифмической функции $y = \log_a x$ и, пользуясь графиком, установить основные свойства этой функции: 1) при $a > 1$ (например, $a = 2$); 2) при $0 < a < 1$ (например, $a = 1/2$).

188. Как построить график функции $y = \log_2 x$, если дан график функции $y = 2^x$?

189. Найти области определения следующих функций: 1) $y = \log_2(x - 2)$; 2) $y = \log_2(-x)$; 3) $y = \log_5(2x^2 + x - 3)$; 4) $y = \log_3(x^2 + 1)$; 5) $y = \log_2(x - 3)^3$.

190. Какое из данных чисел больше:

1) $\log_2 6$ или $\log_2 8$; 2) $\log_{1/2} 6$ или $\log_{1/2} 8$; 3) $\log_6 7$ или $\log_7 6$?

191. Сравнить с единицей число N , если

1) $\log_2 N = -0,7$; 2) $\log_{0,5} N = 2,5$; 3) $\log_{0,3} N = -2,5$.

192. Построить графики функций:

1) $y = \log_2 |x|$; 2) $y = |\log_2 x|$; 3) $y = \log_2 (x+2)$; 4) $y = -\log_2 x - 1$; 5) $y = \sin^2(\log(x-1)) + \cos^2(\log(x-1))$.

Логарифм произведения, частного, степени
и корня

Нижеследующие теоремы справедливы, если a , m и n положительны и $a \neq 1$.

1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей, т. е.

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n.$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности между логарифмом делимого и логарифмом делителя, т. е.

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$$

3. Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм оснований этой степени, т. е.

$$\log_a m^p = p \log_a m.$$

193. 1. Доказать написанные выше формулы.

2. Привести примеры, подтверждающие, что логарифм суммы не равен сумме логарифмов слагаемых, т. е. что

$$\log_a (m+n) \neq \log_a m + \log_a n.$$

3. Существуют ли такие числа m и n , для которых равенство $\log_a (m+n) = \log_a m + \log_a n$ оказывается верным?

4) Дано $\log_a m = b$. Найти $\log_a (am)$; $\log_a \frac{m}{a}$; $\log_a m^2$; $\log_a \sqrt{m}$.

194. Сократить следующие дроби

$$1) \frac{\log_a 8}{2 \log_a 2}; \quad 2) \frac{\log_a \sqrt[5]{9}}{\log_a \sqrt[3]{3}}; \quad 3) \frac{1 - \log_a^2 n}{\log_a (an)}.$$

195. Зная, что $\log_a 2 = x$, $\log_a 3 = y$, найти логарифмы чисел $\log_a 6$; $\log_a 12$; $\log_a \sqrt[3]{18}$.

Логарифмирование выражений. Потенцирование

Теоремы, по которым можно находить логарифмы произведения, частного и степени, позволяют находить логарифм сложного выражения, зная логарифмы чисел, которые входят в это выражение.

Нахождение логарифма данного выражения называется *логарифмированием* этого выражения

Пример. Прологарифмировать по основанию a выражение

$$x = \sqrt[5]{\frac{a^3 b}{\sqrt{c}}}$$

Сначала перейдем к степеням с дробными показателями: $x = a^{3/5} b^{1/5} c^{1/10}$, тогда

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a (a^{3/5} b^{1/5} c^{1/10}) = \log_a c^{1/10} = \log_a a^{3/5} + \log_a b^{1/5} - \log_a c^{1/10} = \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \log_a b - \frac{1}{10} \log_a a. \end{aligned}$$

Действие, обратное логарифмированию, называется *потенцированием*.

Для потенцирования надо воспользоваться теоремами логарифмирования, записав их в обратном порядке ($m > 0$; $n > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$):

1. Сумма логарифмов равна логарифму произведения:

$$\log_a m + \log_a n = \log_a (mn)$$

2. Разность логарифмов равна логарифму частного:

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}.$$

3. Произведение логарифма на число равно логарифму степени:

$$p \log_a m = \log_a m^p.$$

С помощью последних формул можно по логарифму некоторого выражения восстанавливать то выражение, которое логарифмировали.

Пример. Найти x , если $\log_a x = 2 \log_a 7 - \frac{1}{2} \log_a 6 - 4 \log_a 2 + \frac{1}{3} \log_a 17$.

Применим указанные формулы:

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a 7^2 - \log_a 6^{1/2} - \log_a 2^4 + \log_a \sqrt[3]{17} = \log_a 49 - \log_a \sqrt{6} - \\ &- \log_a 16 + \log_a \sqrt[3]{17} = (\log_a 49 - \log_a \sqrt[3]{17}) - (\log_a \sqrt{6} + \log_a 16) = \\ &= \log_a (49 \sqrt[3]{17}) - \log_a (\sqrt{6} \cdot 16) = \log_a \frac{49 \sqrt[3]{17}}{16 \sqrt{6}}, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } x = \frac{49 \sqrt[3]{17}}{16 \sqrt{6}}.$$

196. Прологарифмировать следующие выражения* по основанию 5:

$$1) x = a^a \sqrt{b}; \quad 2) y = \frac{ab}{25}; \quad 3) z = \frac{5xy}{3(x+y)}; \quad S = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$5) V = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{6} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

197. Прологарифмировать по основанию a следующие выражения:

$$1) x = \frac{b^2(m-n^2)^3}{\sqrt{m+n}}; \quad 2) x = \log_a b^2; \quad 3) x = \log_a^2 b; \quad 4) x = \log_a \left(\sqrt{mn} \right)^3.$$

198. Найти x , если

$$1) \log_a x = 2 \log_a 2 + 3 \log_a 3; \quad 2) \log_a x = \log_a \operatorname{tg} \alpha + \log_a \operatorname{ctg} \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) \log_a x = \log_2 \log_2 25 - \log_2 \log_2 5;$$

$$4) \log_b x = \log_b c - \frac{1}{5} \log_b \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{5} \log_b \operatorname{ctg} \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

Десятичные логарифмы

Логарифмы чисел по основанию 10 называются десятичными.

Для десятичных логарифмов вместо обозначения $\log_{10} b$ пишут $\lg b$, при этом основание 10 опускают. Например, вместо $\log_{10} 52$ пишут $\lg 52$, вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

Свойства десятичных логарифмов

1. $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; ...; $\lg 10^n = n$.
2. $\lg 0,1 = -1$; $\lg 0,01 = -2$; ...; $\lg 10^{-n} = -n$.
3. Логарифм рационального числа, не являющегося степенью десяти, — число иррациональное.
Например, логарифмы чисел 20 и 472 ($\lg 20 = 1,3010$...; $\lg 472 = 2,6739$...) выражаются бесконечной десятичной непериодической дробью.

4. Характеристика $\lg 2,7891$ равна 0;

характеристика $\lg 42,758$ равна 1;

характеристика $\lg 814,72$ равна 2.

5. Характеристика $\lg 0,761$ равна -1;

характеристика $\lg 0,0867$ равна -2;

характеристика $\lg 0,00792$ равна -3.

6. Если $\lg a = x$, то $\lg(a \cdot 10^n) = x + n$ и $\lg(a : 10^n) = x - n$, $n \in \mathbb{Z}$.

199. Вычислить:

$$1) 10^{\lg 2 + 1}; \quad 2) 100^1 - \lg 2; \quad 3) 100^{0,5 \lg 7 + 1}; \quad 4) \lg 2 + \lg 5;$$

$$5) \lg 300 - \lg 3; \quad 6) \lg \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2 \lg 75 - 2 \lg 0,75; \quad 7) \lg \cos \pi;$$

* Буквами обозначены положительные числа.

- 8) $\lg^2 0,01 + \lg \lg 10 + \lg 10 \lg 10$; 9) $\frac{1 - \lg^2 0,1}{1 + \lg^2 0,1}$; 10) $\frac{\lg \lg 7^{10}}{1 + \lg \lg 7}$;
 11) что больше: $\lg 7 - \lg 5$ или $\frac{1}{2} \lg 9 - \frac{1}{3} \lg 8$?

Решение показательных уравнений

Уравнение называется *показательным*, если оно содержит переменную в показателе степени.

Общий вид простейшего показательного уравнения $a^x = b$, где a и b — данные положительные числа ($a \neq 1$), x — переменное.

Наиболее употребительные способы решения этих уравнений следующие:

- 1) приведение обеих частей уравнения к одному основанию (200);
- 2) вынесение общего множителя за скобку (201);
- 3) введение нового переменного (202);
- 4) логарифмирование обеих частей уравнения (203);
- 5) графический метод (204).

Решить следующие уравнения:

200. 1) $9^x = 27^{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{3x+1}}$; 3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$;
 4) $5^{x^2-x-2} = 1$; 5) $2^x 5^x = 0,01 \cdot 10^{3x+3}$; 6) $3^{1/x} = 27$.
 201. 1) $3^{3x+1} - 5 \cdot 3^{3x-1} = 36$; 2) $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155$.
 202. 1) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$; 2) $9^{x-1} + 3^{x+2} - 90 = 0$;
 3) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 2,5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$; 4) $5^x - 0,2^x = 4,8$.
 203. 1) $2^x = 6$; 2) $3^x = 100$.
 204. Решить графические уравнения:
 1) $2^x = x+2$; 2) $2^x = 4x$; 3) $2^x = \frac{1}{2} x^2$.
 205. Решить неравенства:
 1) $4^{x+1} > 8$; 2) $3^{x^2} > 81$; 3) $2,5^{x^2+5x} > 1$; 4) $0,1 < 10^x < 1000$;
 5) $0,5^x > 0,25$; 6) $(0,125)^{x+1} < 0,0625$; 7) $(0,1)^{2x^2+2x-3} < (0,01)^{x^2+1}$.

Решение логарифмических уравнений

Уравнение называется *логарифмическим*, если оно содержит переменную величину под знаком логарифма

Общий вид простейшего логарифмического уравнения $\log_a x = b$, где a и b — данные числа ($a > 0$, $a \neq 1$), x — переменное.

Способы решения логарифмических уравнений:

- 1) применение определения логарифма (206);
- 2) непосредственное потенцирование (207);
- 3) предварительная замена числа логарифмом (208);
- 4) введение вспомогательного переменного (209);
- 5) почленное логарифмирование (210);
- 6) графический метод (211)

Решить следующие уравнения:

206. 1) $\log_2(x-3)=4$; 2) $\log_{1/2}(5x-1)=-2$;
 3) $\log_{36}(x^2-10)=\frac{1}{2}$; 4) $\log_x(x+6)=2$; 5) $\log_x(6x+5x^2)=3$;
 6) $\lg\left(64\sqrt[24]{2x^2-10x}\right)=0$; 7) $\log_9\left[\frac{1}{3}\log_3(2-\log_{1/2}x)\right]=-\frac{1}{2}$;
 8) $\lg(\log_3 x)=0$; 9) $\lg(\lg^2 x)=0$.

207. 1) $\lg x=2\lg 3$; 2) $\lg x=-2\lg 5$; 3) $\frac{\lg x}{\lg x - \lg 2}=3$;
 4) $\frac{\lg 2x}{\lg(x+3)}=1$; 5) $\frac{\lg(x^2-20)}{\lg(x+10)}=1$; 6) $4\lg 2+2\lg(x-3)=$
 $=\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3$.

208. 1) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; 2) $2\lg 5+\lg x=1-\lg 2$;
 3) $\lg(991+3\sqrt{x/2})=3$; 4) $\lg(2^x+x-5)=x(1-\lg 5)$.

209. 1) $\lg^2 x+\lg x-2=0$; 2) $\log_x^2 \sqrt{5}-\log_x 5 \sqrt{5}+$
 $+1,25=0$; 3) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^2-1)=1$.

210. 1) $x^{\lg x}=\frac{100}{x}$; 2) $x^{\lg \sqrt{x}}=100$; 3) $\sqrt{x^{2\lg x}}=100x$;
 4) $x^{\lg x+1}=x^{\log_x 100}$.

211. Решить графически уравнения:

- 1) $\log_2 x=\frac{1}{3}(x+1)$; 2) $\log_2 x=\frac{6}{x}$; 3) $\log_2 x=\frac{1}{x}$.

212. Решить следующие системы уравнений:

- 1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 3, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 2y = 100, \\ \lg x - \lg y = \lg 8 - \lg 5. \end{cases}$

213. Решить неравенства:

- 1) $\log_3(x+3) > \log_3 4$; 2) $\log_{0,5} 5x < \log_{0,5} 25$;
 3) $\log_{0,3}(x+1) < 1$; 4) $|\log_2 x| < 1$; 5) $|\log_{0,5} x| > 2$.

Переход от одного основания логарифмов к другому

Если a и b — положительные числа и отличны от единицы и $N > 0$, то справедливы следующие соотношения:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \quad (1)$$

например $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{\lg 3}{\lg 2}$; если в формуле (1) заменить N на b , то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad (2)$$

например $\log_2 10 = \frac{1}{\lg 2}$,

если $k \neq 0$, то

$$\log_a N = \log_{a^k} N^k, \quad (3)$$

например $\log_{100} 25 = \log_{100^{1/2}} 25^{1/2} = \log_{10} 5 = \lg 5$.

214. 1. Дано $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$. Найти $\lg_3 5$.

2. Вычислить $\log_8 27 - \log_{0,8} 1/3$.

3. Доказать, что $\log_9 2 \log_4 81 = 1$.

215. Решить уравнения:

- 1) $\log_3 x = 2 \log_9 4 + 3 \log_{27} 2$; 2) $\log_3 x + \log_5 x = 2$;
3) $\log_x 10 + \lg x = 2$; 4) $\log_4 (x+12) \log_x 2 = 1$.

216. Построить графики функций:

1) $y = x^{\frac{1}{\lg x}}$; 2) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$.

Число e

217. Что Вам известно о числе e ?

218. 1. Что называют натуральным логарифмом?

2. Чему равны выражения а) $\ln e$; б) $\ln e^3$; в) $e^{\ln 10}$?

Производная показательной функции

Производная показательной функции отличается от самой функции постоянным множителем:

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x.$$

Заменяя в этой формуле a на e ($\ln e = 1$), получим

$$(e^x)' = e^x.$$

Производная логарифмической функции

$$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Заменяя a на e , получим

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

219. Найти производные функции:

- 1) $y = xe^x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = \frac{5^x}{x+1}$; 4) $y = x^3 \log_2 x$.

220. Изобразить схематически график функции $y = e^x$; напишите уравнение касательной к графику функции в точке $(0; 1)$.

221. Изобразить схематически график функции $y = \ln x$ и написать уравнение касательной к графику функции в точке $(1; 0)$.

222. Изобразить схематически графики функций $y = e^{\ln x}$; $y = e^{\ln(-x)}$; $y = e^{-\ln x}$.

ГЛАВА XI

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Перестановки

Любое упорядоченное множество, образованное из всех элементов некоторого множества, называется *перестановкой* из этих элементов

Число перестановок из n элементов (P_n) равно произведению первых n натуральных чисел, т. е.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Произведение первых n натуральных чисел принято обозначать через $n!$, поэтому $P_n = n!$ При этом полагают, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

223. 1. Какое множество называется упорядоченным?

2. Из множества $\{a; b\}$, содержащего два элемента, образовать различные упорядоченные множества.

3. Ответить на тот же вопрос для множества $\{a; b; c\}$, содержащего три элемента.

224. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 так, чтобы в написанном трехзначном числе одна и та же цифра не повторялась дважды?

225. Сколькими способами можно распределить между четырьмя отпускниками четыре путевки в различные дома отдыха?

226. Сколькими способами можно расставить в одну шеренгу 8 человек?

227. В финал футбольных соревнований вышли 6 команд. Сколько существует вариантов распределения мест между этими командами?

228. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, если каждую цифру в четырехзначном числе можно использовать лишь один раз?

229. Вычислить:

$$1) \frac{11!}{10!}; \quad 2) \frac{10!}{8!}; \quad 3) \frac{7! \cdot 6!}{9! \cdot 5!}; \quad 4) \frac{5! + 6!}{4!}.$$

230. Решить уравнения:

$$1) \frac{(x+1)!}{x!} = 6; \quad 2) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30; \quad 3) \frac{(n+2)!}{n!} = 56.$$

Сочетания

Если множество A содержит n элементов, то *сочетанием* из n элементов по k называется всякое подмножество, состоящее из k элементов данного множества.

Число таких сочетаний обозначается через C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (1)$$

где n и k — натуральные, причем $0 \leq k \leq n$, или

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (2)$$

231. 1. Что называется подмножеством данного множества A ? Привести примеры.

2. Выписать все подмножества множества $A = \{a; b\}$, состоящего из двух букв.

3. Тот же вопрос для множества $A = \{a; b; c\}$, состоящего из трех букв.

232. Вычислить: 1) C_4^0 ; 2) C_4^1 ; 3) C_4^2 ; 4) C_4^3 ; 5) C_4^4 .

233. Чему равно 1) C_n^0 ; 2) C_n^1 ; 3) C_n^n ?

234. Сколькими различными способами можно распределить три путевки на одну турбазу, если на эти путевки имеются 6 кандидатов?

235. Из 40 человек нужно выбрать двух делегатов на конференцию. Сколькими способами можно это сделать?

236. Из 10 рабочих нужно выделить 4 для определенной работы. Сколькими способами это можно сделать?

237. Сколько различных прямых можно провести через 8 точек, расположенных так, что между ними нет трех, лежащих на одной прямой?

238. Сколько различных произведений, содержащих два, три, четыре сомножителя, можно составить из цифр 1; 5; 6; 7; 9?

Свойство числа сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Множество из n элементов имеет одинаковое число подмножеств, содержащих k элементов, и подмножеств, содержащих $n - k$ элементов.

239. Вычислить: 1) C_{20}^{19} ; 2) C_{20}^{17} ; 3) C_{100}^{98} .

240. Решить уравнения 1) $C_{x-1}^2 = 6$; 2) $C_x^{x-2} = 28$.

Размещения

Если множество M содержит n элементов, то *размещением* из n элементов по k называется всякое упорядоченное его подмножество, состоящее из k элементов

Число таких размещений обозначается A_n^k и вычисляется по формулам

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{или} \quad A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \\ (k \text{ сомножителей}).$$

241. Вычислить:

1) A_5^1 ; 2) A_5^2 ; 3) A_5^3 ; 4) A_5^4 ; 5) A_5^5 .

242. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждую цифру в двузначном числе можно использовать лишь один раз?

243. Сколькими различными способами можно распределить три путевки в различные турбазы, если на эти путевки имеются 6 кандидатов?

244. Решить уравнения

1) $A_x^2 = 20$; 2) $A_x^3 = 72x$; 3) $A_x^2 = C_x^3$.

Натуральная степень бинома

С помощью следующей формулы можно возвести бином (двучлен) в произвольную натуральную степень:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + \\ + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Если в этой формуле заменить b на $(-b)$, то

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^n a^n \\ (\text{знаки «+» и «-» чередуются}). \quad (2)$$

Формула общего члена разложения

Все члены разложения бинома $(a+b)^n$ можно получить по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (3)$$

где k означает число членов, предшествующих определяемому. Давая в этой формуле k значения $0, 1, 2, \dots$, можно получить любой член разложения бинома (1) (учитывая, что $C_n^0 = 1$).

В разложении бинома $(a - b)^n$ на нечетных местах расположены положительные члены, а на четных — отрицательные; общий член разложения этого бинома

$$T_{k+1} = (-1)^k a^{n-k} b^k.$$

245. 1. Написать формулу Ньютона (1) для $n = 2, 3, 4, 5$.

2. Сколько членов содержит разложение бинома $(a + b)^n$?

3. Чему равна сумма биномиальных коэффициентов разложения бинома $(a + b)^n$?

246. Написать разложения следующих биномов:

1) $(a - b)^4$; 2) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5$; 3) $(a + 1)^6$; 4) $\left(\frac{1}{x} + 2\right)^6$.

247. Найти 1) 6-й член разложения бинома $(a + 1)^{10}$; 2) 5-й член разложения $\left(\frac{1}{x} - x\right)^6$; 3) два средних члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}\right)^7$.

248. В разложении $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a}\right)^{10}$ найти член, который после упрощения содержит букву a в четвертой степени.

249. Коэффициент при x в третьем члене разложения $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^n$ равен 31. Найти показатель бинома.

ГЛАВА XII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Радиианное измерение угловых величин

250. 1. Что принимается при градусном измерении за единицу измерения углов; за единицу измерения дуг окружности?

2. Что называется радианом?

3. Что называется радианной мерой дуги; радианной мерой угла?

4. Чему равна радианная мера всей окружности?

5. Выразить радиан в градусной мере точно и приближенно.

6. Выразить 1° в радианах точно и приближенно.
 7. Найти радианную меру угла, если он равен: а) 180° ,
 б) 90° ; в) 60° ; г) 30° ; д) 1260° .

8. Следующие углы выразить в градусах: а) $\frac{3}{2}\pi$;
 б) $\frac{5}{6}\pi$; в) $\frac{4}{5}\pi$.

9. Дан угол, равный 1,5 рад. Что это за угол: острый, прямой, тупой, больший или меньший развернутого? Ответить на тот же вопрос для углов, равных 2; 3; 4; 5 рад.

251. 1. Какое направление поворота считается положительным; отрицательным?

2. Как может быть задан любой поворот?

3. При отвинчивании колпачка авторучки повернули его «по часовой стрелке» на 2,5 оборота. Выразить в градусах и радианах величину угла поворота.

4. При отвинчивании водопроводного крана повернули вентиль на 2,25 оборота «против часовой стрелки». Выразить угол поворота в градусах и радианах.

5. Записать с использованием обозначения R^α ($-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ или $-\pi \leq \alpha \leq \pi$) повороты на угол а) 390° ;
 б) -750° ; в) $2,5\pi$; г) $\frac{14\pi}{3}$.

Длина дуги и площадь сектора

252. 1. Чему равна длина дуги в α (рад)?

2. Чему равна площадь сектора, если дуга его содержит α (рад)?

3. Угловая величина дуги равна 150° , а радиус $r=3$ м. Найти длину этой дуги.

4. Радианная мера дуги сектора равна $\frac{6}{3}\pi$, а радиус равен 6 см. Найти площадь сектора.

Определение тригонометрических функций

Обозначим через P_0 точку единичной окружности с координатами $(1; 0)$ (рис. 8, а, б). Поворот R^α на угол α вокруг начала координат отображает точку P_0 на точку P_α (рис. 8, а), которая также лежит на единичной окружности.

Ордината y_α точки P_α называется *синусом угла α* , т. е. $y_\alpha = \sin \alpha$.

Абсцисса x_α точки P_α называется *косинусом угла α* , т. е. $x_\alpha = \cos \alpha$.

Пусть P_t (рис. 8, б) есть точка, получающаяся из точки P_0 при повороте вокруг начала координат на t (рад) — в этом случае *ордината* точки P_t называется *синусом* числа t , т. е. $y_t = \sin t$. *Абсцисса* точки P_t называется *косинусом* числа t , т. е. $x_t = \cos t$.

Тангенсом числа (угла) t называется отношение синуса этого числа (угла) к его косинусу, т. е. $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$.

Котангенсом числа (угла) t называется отношение косинуса этого числа (угла) к его синусу, т. е. $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Так как аргумент под знаком функции можно обозначить любой буквой, то приведенные выше формулы можно записать и так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \text{ и т. д.}$$

Иногда рассматривают еще две тригонометрические функции — секанс и косеканс: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

253. 1. Почему $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ называют тригонометрическими функциями угла α (числа α)?

2. Каковы области определения и множества значений синуса, косинуса, тангенса?

254. Может ли синус какого-либо числа (угла) быть равным 1) $2^{1/2}$; 2) $-(-3)^0$; 3) $8^{-2/3}$; 4) $10^{\lg 2}$; 5) $\frac{\pi}{3}$.

255. В каких пределах может изменяться каждая из следующих функций:

1) $2+3 \sin x$; 2) $-2 \cos x$; 3) $5^{\sin x}$; 4) $3^{2+\cos x}$; 5) $\log_3(\sin x+2)$; 6) $\sin x + \cos x$?

Знаки тригонометрических функций

Для определения знака каждой тригонометрической функции в соответствующей четверти удобны следующие схемы (рис. 9), из которых видно, что синус положителен по горизонтали (I и II четверти), косинус — по вертикали (I и IV четверти), тангенс и котангенс — по диагонали (I и III четверти).

256. 1. Почему синусы чисел (углов), находящихся в I и II четвертях, положительны?

2. Почему косинусы чисел (углов), находящихся во II четверти, отрицательны?

3. В каких четвертях имеют одинаковые знаки:

а) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$; б) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$; в) $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$?

4. Может ли синус внутреннего угла треугольника быть числом отрицательным? Ответить на тот же вопрос для других тригонометрических функций.

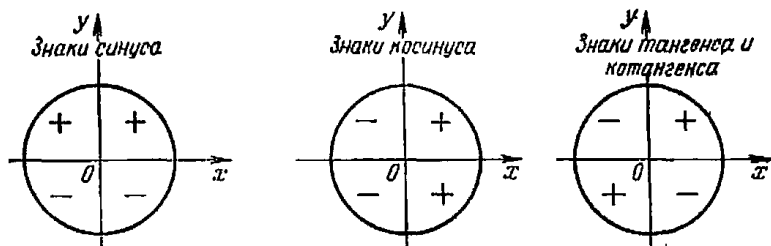


Рис. 9

257. Считая угол $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, определить знаки следующих выражений: 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos(\pi - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.

258. Если α — число (угол) III четверти, определить, положительны или отрицательны выражения:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos \frac{\alpha}{4}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; 4) $\cos \frac{2}{3} \alpha$.

Значения тригонометрических функций некоторых аргументов

Таблица 2

α	0° (0)	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(\frac{3}{2}\pi\right)$	360° (2π)
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	Не существует	0	Не существует

259. Вычислять:

- 1) $\frac{\sin(\alpha + 15^\circ) - \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$ при $\alpha = 30^\circ$;
 2) $\frac{\cos(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(4\alpha - 2\beta)}{\sin 3\alpha + \operatorname{ctg} \beta}$ при $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

260. Упростить:

- 1)
$$\frac{a^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a^2 b \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + 12ab^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + 2b^3 \cos \frac{\pi}{3}}{a^3 \cos^3 \pi - 2ab \sin \frac{3}{2} \pi + b^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}};$$

 2)
$$\frac{a^3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - b^3 \cos 0}{ab \operatorname{tg} \pi - a \sin \frac{3}{2} \pi + b \cos \pi} + \frac{a^3 \sin^2 \frac{\pi}{2} + b^3 \cos^2 \pi}{a^3 \cos^2 0 - ab \sin \frac{3}{2} \pi + 2b^3 \sin \frac{\pi}{6}}.$$

Периодичность тригонометрических функций

261. Чему равен наименьший положительный период функций $\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$?

Записать равенствами периодичность этих функций.

262. Вычислить:

1) $\sin 810^\circ + \cos 1440^\circ + \operatorname{tg} 600^\circ + \operatorname{ctg} 1170^\circ$; 2) $\sin^2 \frac{49}{6} \pi + \cos^2 \frac{19}{3} \pi + \operatorname{tg}^2 \frac{4}{3} \pi$.

263. Найти период следующих функций:

- 1) $y = \sin kx$; 2) $y = \cos mx$; 3) $y = \operatorname{tg} nx$; 4) $y = \sin 2x$;
 5) $y = \cos 3x$; 6) $y = \operatorname{tg} 4x$; 7) $y = \sin \frac{x}{2}$; 8) $y = \cos \frac{2}{8} x$;
 9) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

Четные и нечетные тригонометрические функции

264. Какие из основных тригонометрических функций являются четными; нечетными?

265. Вычислить:

- 1) $\sin(-\pi/2) + \operatorname{tg}(-\pi/4) - \sin^2(-\pi/6) + \cos^2(-\pi/3)$;
 2) $\sin(-330^\circ) + \cos(-420^\circ) + \operatorname{tg}(-120^\circ) + \operatorname{ctg}(-300^\circ)$;
 3) $\cos(-\frac{7}{3} \pi) + \sin(-\frac{17}{2} \pi) + \operatorname{ctg}(-\frac{17}{6} \pi) + \operatorname{tg}(-\frac{16}{3} \pi)$.

266. Установить четность или нечетность следующих функций:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{\sin x}$; 2) $f(x) = x \sin x$; 3) $f(x) = \sin x \cos x$;
4) $f(x) = \sin x + \cos x$.

Производные тригонометрических функций

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x, \quad \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

267. Найти производную функции:

- 1) $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$; 2) $\varphi(x) = x \sin x$; 3) $h(x) = \operatorname{ctg} x$.

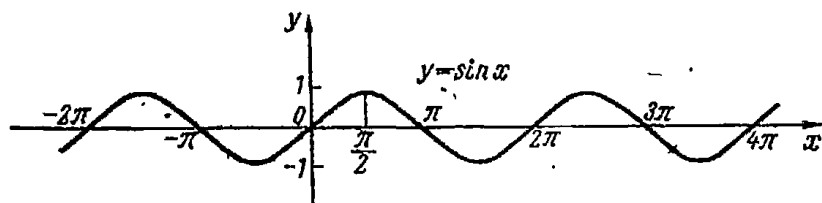


Рис. 10

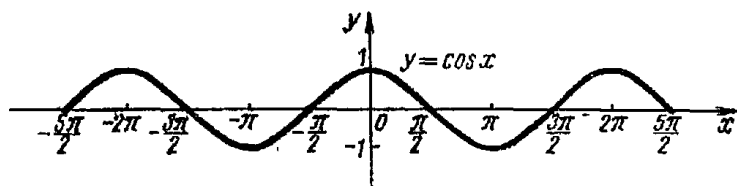


Рис. 11

268. 1. Показать, что производная функции $f(x) = 2x + \cos x$ положительна при всех значениях x .

2. При каких значениях x производная функции $\varphi(x) = x + \cos x$ обращается в ноль?

Свойства и графики тригонометрических функций

Графиком функции $y = \sin x$ служит кривая, называемая *синусоидой* (рис. 10).

Графиком функции $y = \cos x$ служит кривая, называемая *косинусоидой* (рис. 11).

Графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ служит кривая, называемая *тангенсоидой* (рис. 12).

269. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, ответить на следующие вопросы: 1) область определения функций;

* Раньше записывали так: $(\sin x)' = \cos x$.

- 2) множество значений функции; 3) четность функции;
4) периодичность функции; 5) значения аргумента, при которых функция обращается в ноль (корни функции);

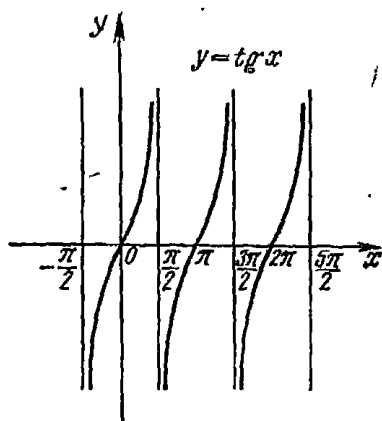


Рис. 12

- 6) интервалы, в которых эта функция положительна и отрицательна; 7) значения аргументов, при которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

270. Ответить на те же 7 вопросов для функций

- а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$.

271. Найти области определения функций:

- 1) $y = \lg \cos x$; 2) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 3) $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}$; 4) $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

272. Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, ответить на следующие вопросы:

1. Как изменяется $\sin x$ при возрастании аргумента x
а) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; б) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$?

2. Как найти несколько частных решений уравнения $\sin x = 1/2$?

3. Найти (с точностью до 0,1) а) $\sin 0,75$; б) $\sin 1$; в) $\sin(-2,5)$.

273. Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, ответить на следующие вопросы:

1. Как изменяется $\cos x$, если аргумент x а) возрастает от 0 до π ; б) от π до 2π ?

2. Найти (с точностью до 0,1): а) $\cos 1$; б) $\cos 2,5$; в) $\cos(-3)$.

3. Как найти несколько частных решений уравнения $\cos x = -1/2$?

274. Построить графики следующих функций:

- 1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = -\sin x$; 3) $y = \sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \sin 2x$;
5) $y = |\sin x|$; 6) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

275. Построить графики функций: 1. $y = 3 \cos x$; $y = -\cos x$; 3) $y = \cos |x|$; 4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 5) как можно

получить график функции $y = \cos x$, если имеется график функции $y = \sin x$?

276. Пользуясь графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, ответить на следующие вопросы:

1. Как изменяется $\operatorname{tg} x$, если x возрастает в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$?

2. Найти (с точностью до 0,1) $\operatorname{tg} 1$; $\operatorname{tg}(-2)$.

277. Построить графики функций 1) $y = |\operatorname{tg} x|$; 2) $y = \operatorname{tg}|x|$; 3) $y = -\operatorname{tg} x$.

278. Найти уравнение касательной к графику функции: 1) $f(x) = 2 \sin x$ в точке $(0; 0)$; 2) $\varphi(x) = 3 \operatorname{tg} x$ в точке $(-\frac{\pi}{4}; 3)$.

Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла (числа)

Следующие основные формулы позволяют вычислить значения всех тригонометрических функций какого-либо угла (числа), если известно значение одной из них. Кроме того, они часто применяются при доказательстве тождеств и решении тригонометрических уравнений.

Для лучшего запоминания этих формул можно распределить их на три группы.

Формулы квадратов

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

$$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad (2a)$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1, \quad (3a)$$

Формулы деления

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5)$$

Формулы обратных величин

$$\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1, \quad (6)$$

$$\cos \alpha \sec \alpha = 1, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (8)$$

279. При каких значениях α теряют смысл написанные выше формулы?

280. Вычислить все тригонометрические функции угла, если 1) $\sin \alpha = 0,6$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; 2) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{3}{2} \pi < \alpha < 2\pi$;

- 3) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; 4) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $0 < \alpha < c$.

281. Упростить следующие выражения:

$$1) \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}; \quad 2) \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + 1; \quad 3) \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) + \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right); \quad 4) (\cos x \operatorname{tg} x)^2 + (\sin x \operatorname{ctg} x)^2.$$

282. Доказать справедливость следующих тождеств:

$$1) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha; \quad 2) (\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x) \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = 1;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

283. Выразить: 1) $\operatorname{tg} \alpha$ через $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$;

3) $\sin \alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$.

284. 1. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$. Вычислить а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

2. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Найти а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; в) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

285. Найти значения дробей:

$$1) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 1,5; \quad 2) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

286. Построить графики следующих функций:

$$1) y = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2; \quad 2) y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2; \quad 3) y = |\operatorname{tg} x \cos x|; \quad 4) y = |\sin x \operatorname{ctg} x|.$$

Формулы приведения

Приведенные ниже формулы (табл. 3), а также формулы периодичности тригонометрических функций (см. 261) позволяют свести вычисление значений тригонометрических функций углов любой величины к вычислению тригонометрических функций острого угла α и даже угла, не превышающего $\pi/4$.

Для того чтобы усвоить все эти формулы, нет необходимости их запоминать, достаточно уяснить два вопроса. 1) какой знак и 2) какое название будет иметь функция.

1. В правых частях всех формул ставится тот знак, который имеет заданная функция для данного угла, считая угол α острым.

2. Если какой-нибудь угол α прибавляется к числу π или 2π или вычитается из них, то название тригонометрической функции не изменяется.

Если же какой-нибудь угол α прибавляется к числу $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$ или вычитается из них, то название тригонометрической функ-

ции меняется на созвучное (синус на косинус, тангенс на котангенс, и наоборот).

Таблица 3

Аргумент	Функция			
	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$x = -a$	$-\sin a$	$\cos a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$
$x = \frac{\pi}{2} - a$	$\cos a$	$\sin a$	$\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg} a$
$x = \frac{\pi}{2} + a$	$\cos a$	$-\sin a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$
$x = \pi - a$	$\sin a$	$-\cos a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$
$x = \pi + a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$
$x = \frac{3}{2}\pi - a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg} a$
$x = \frac{3}{2}\pi + a$	$-\cos a$	$\sin a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$
$x = 2\pi - a$	$-\sin a$	$\cos a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$

287. Упростить:

- 1) $\operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 63^\circ$; 2) $\frac{\sin 70^\circ}{\cos 20^\circ}$; 3) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12}$;
 4) $\cos^2(60^\circ - a) + \cos^2(30^\circ + a)$; 5) $\operatorname{tg} \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{tg} \operatorname{ctg} 20^\circ$.

288. 1. Найти $\operatorname{tg}(90^\circ - a)$, если $\operatorname{tg} a = 2$.

2. Чему равно произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника?

3. Найти $\sin(90^\circ - x)$, если $\sin x = 0,8$.

289. Вычислить:

- 1) $\sin 150^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 315^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$; 5) $\sin 1225^\circ$;
 6) $\operatorname{tg}(-135^\circ)$; 7) $\sin 2$; 8) $\cos 5,23$.

290. Доказать следующие тождества:

- 1) $\cos 720^\circ \sin 810^\circ + \operatorname{ctg} 585^\circ \operatorname{tg} 1845^\circ + \sin 315^\circ \cos 405^\circ = 1,5$; 2) $\left[\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^2 + \left[\operatorname{ctg} \frac{9}{4}\pi + \operatorname{ctg}(\pi - x) \right]^2 = \frac{2}{\sin^2 x}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - a) \cos(\pi - a)}{\operatorname{tg} \left(\frac{3}{2}\pi + a \right) \cos \left(\frac{3}{2}\pi + a \right)} = -\operatorname{tg} a$; 4) $\sin \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{5} = 0$; 5) $\cos \frac{17}{30}\pi + \cos \frac{47}{30}\pi = 0$.

291. Пусть A , B и C — углы треугольника. Доказать, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin(A+B) &= \sin C; & 2) \quad \cos(A+B) &= -\cos C; \\ 3) \quad \sin \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

292. С помощью графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ показать, что 1) $\sin(\pi+x) = -\sin x$; 2) $\cos(\pi+x) = -\cos x$.

Синус, косинус, тангенс суммы двух аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

Формула (5) справедлива, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2m+1)$ и $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Формула (6) справедлива, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2m+1)$ и $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$).

293. Зная значения тригонометрических функций углов в 30° и 45° , вычислить: 1) $\sin 75^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

294. Упростить следующие выражения: 1) $\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ$; 2) $(\cos 18^\circ \cos 7^\circ - \sin 18^\circ \sin 7^\circ)^2 + (\sin 15^\circ \times \cos 10^\circ + \cos 15^\circ \sin 10^\circ)^2$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $(\sin 1 \cos 2,14 + \cos 1 \sin 2,14) + (\cos 1 \cos 0,57 - \sin 1 \sin 0,57)$; 5) $\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$.

$$6) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{15} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}.$$

295. Вычислить:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = -8/17$, $\cos \beta = 3/5$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$; 2) $\cos(x - y)$, если $\sin x = -4/5$,

$\operatorname{ctg} y = 7/24$, $270^\circ < x < 360^\circ$, $180^\circ < y < 270^\circ$; 3) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$, $\operatorname{tg} \beta = 3$; 4) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$, если $\sin \alpha = 0,8$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; 5) $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$, если $\operatorname{tg}(15^\circ + \alpha) = 2$.

296. Упростить следующие выражения:

$$1) \sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos 2\alpha; \quad 2) 1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 4\alpha; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \times \\ \times (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

297. Доказать следующие тождества:

$$1) \sin^3 2\alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha \sin^3 \alpha = \sin 3\alpha \sin \alpha; \quad 2) 2 \sin 2\alpha \times \\ \times \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{ctg} 220^\circ}{\operatorname{tg} 225^\circ \operatorname{ctg} 220^\circ - 1} = \operatorname{ctg} 5^\circ;$$

$$4) \cos 75^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

298. 1. Дано: $x = a \sin(\alpha + \beta)$, $y = a \sin(\alpha - \beta)$. Доказать, что $x + y = 2a \sin \alpha \cos \beta$.

2. Дано: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{2}$.

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3)$$

Формула (3) справедлива для всех значений α , кроме $\alpha = -\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. В первом случае $\operatorname{tg} \alpha$ не имеет определенного значения, во втором случае знаменатель $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$ обращается в ноль.

299. Доказать, что при $0 < \alpha < \pi/2$ 1) $\sin 2\alpha < \sin \alpha$. При каких значениях α $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$? 2) $2 \cos \alpha > \cos 2\alpha$.

300. Следующие тригонометрические функции углов (чисел) выразить через функции вдвое меньшего аргумента:

1) $\cos \alpha$; 2) $\operatorname{tg} \alpha$; 3) $\sin 5\alpha$; 4) $\cos(\alpha - \beta)$; 5) $\sin(90^\circ - \alpha)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 7) $\operatorname{ctg} 40^\circ$.

301. Выразить 1) $\sin 2\alpha$ только через $\sin \alpha$; 2) $\cos 2\alpha$ только через $\cos \alpha$.

302. Вычислить: 1) $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$; 2) $\sin 4x$, если $\sin 2x = 5/13$; 3) $\operatorname{tg} 6x$, если $\operatorname{ctg} 3x = 3,5$.

303. Упростить следующие выражения:

- 1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; 2) $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$;
 3) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$; 4) $\sin 20^\circ \sin 70^\circ$; 5) $\sin \alpha \sin (90^\circ - \alpha)$;
 6) $\frac{\sin 160^\circ}{\cos^4 40^\circ - \sin^4 40^\circ}$; 7) $16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$;
 8) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{2 \operatorname{tg} 15^\circ}$.

304. Доказать следующие тождества:

- 1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2$; 3) $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha = 2$; 4) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$; 5) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$; 6) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

Тригонометрические функции половинного аргумента

Следующие формулы выражают тригонометрические функции произвольного аргумента через функции в два раза большего аргумента*:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (1a)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (2a)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (3a)$$

305. В каких случаях в формулах (1a) и (2a), (3) перед знаком корня ставят знак плюс или минус?

306. Следующие функции выразить через косинус вдвое большего аргумента: 1) $\sin 3\alpha$; 2) $\sin (45^\circ - \varphi)$; 3) $\sin^2 \alpha$; 4) $\cos^2 \alpha$.

* Формулы (1) и (2) называют формулами понижения степени.

307. Вычислить без помощи таблиц 1) $\cos 22^\circ 30'$; 2) $\sin 15^\circ$.

308. Вычислить: 1) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ и $180^\circ < 2\alpha < 270^\circ$; 2) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Часто необходимо сумму тригонометрических функций представить в виде произведения. Такое преобразование бывает полезно при вычислениях с помощью таблиц логарифмов, так как произведение может быть логарифмируемо. Поэтому преобразование суммы тригонометрических функций в произведение называют приведением данного выражения к виду, удобному для логарифмирования.

Следующие формулы позволяют выполнить такие преобразования:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (5)$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

309. Следующие выражения преобразовать в произведения:

- 1) $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ$; 2) $\sin 56^\circ - \cos 56^\circ$; 3) $\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}$; 4) $\sin \alpha + \cos \alpha$; 5) $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ$; 6) $\operatorname{tg} 22^\circ 30' - \operatorname{ctg} 22^\circ 30'$; 7) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; 8) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$; 9) $\sin^2 (\alpha - 15^\circ) - \cos^2 (\alpha + 15^\circ)$; 10) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$; 11) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$; 12) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$; 13) $\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha$; 14) $1 + \cos (\alpha + \beta)$; 15) $1 + \sin 20^\circ$; 16) $1 - \sin \alpha$.

310. Преобразовать в произведение введением вспомогательного аргумента следующие выражения:

- 1) $0,5 + \sin \alpha$; 2) $1 - 2 \sin \alpha$; 3) $\sqrt{3 + 2 \cos x}$; 4) $1 + \operatorname{tg} x$;
5) $\sqrt{3 \operatorname{tg} \alpha - 1}$; 6) $1 - 4 \cos^2 \alpha$; 7) $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$.

311. Доказать следующие тождества:

$$1) 1 + \sin x = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), \quad 2) \sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha = \\ = 4 \sin 5\alpha \cos \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}, \quad 3) \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha = \\ = 4 \cos 3\alpha \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Обратные тригонометрические функции

312. Почему функция $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ обратима? Как называется обратная функция?

313. Почему функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ обратима? Как называется обратная функция?

314. Почему функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $]-\pi/2; \pi/2[$ обратима? Как называется обратная функция?

315. Найти область определения и множество значений функций

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = \operatorname{arctg} x$.

316. Найти значения следующих выражений:

1) $\arcsin 1$; 2) $\arcsin(-1)$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 6) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
7) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; 8) $\arcsin \frac{\pi}{3}$.

ГЛАВА XIII

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решение тригонометрических уравнений

Основными тригонометрическими уравнениями являются следующие:

$$\sin x = a, \text{ где } -1 < a < 1;$$

$$\cos x = a, \text{ где } -1 < a < 1;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \text{ где } -\infty < a < \infty.$$

Приведем множество решений каждого из этих уравнений.

Т а б л и ц а 4

№	Уравнение	Множество решений
1	$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k^*$
	$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
	$\sin x = 0$	$x = \pi k$
	$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
2	$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$
	$\cos x = -1$	$x = \pi(2k+1)$
	$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$
	$\cos x = 1$	$x = 2\pi k$
3	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
	$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi k$

317. Решить простейшие тригонометрические уравнения:

- 1) $2 \sin x = \sqrt{3}$; 2) $2 \cos x = -1$; 3) $\sin 2x = 0$; 4) $\cos 3x = 0$;
 5) $\sin \frac{x}{2} = 0$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$; 7) $2 \sin 4x = 4$; 8) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$.

318. Решить уравнения, содержащие одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента:

- 1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$; 2) $\cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$;
 3) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$.

319. Решить тригонометрические уравнения, приводимые к одной функции:

- 1) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$; 2) $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$; 3) $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin x$.

* Здесь и везде при решении тригонометрических уравнений считаем $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

320. Решить уравнения, левая часть которых раскладывается на множители, а правая равна нулю:

1) $\cos^2 x - \cos x = 0$; 2) $2 \sin 2x - \sin^2 2x = 0$; 3) $2 \sin 2x \times \cos 4x + \cos 4x = 0$; 4) $2 - 2 \sin^2 x - \cos x + \sin^2 x \cos x = 0$; 5) $\sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$.

321. Решить тригонометрические уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin x = \cos x$; 2) $\sin 3x + \cos 3x = 0$; 3) $\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = 0$; 4) $3 \sin^2 x = \cos^2 x$; 5) $4 \sin^3 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 1$.

322. Решить уравнения, приводимые к одному аргументу:

1) $2 \cos^2 (\pi - x) + 3 \sin (\pi + x) = 0$, 2) $\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{3}{2} \pi - x \right) = 3 \operatorname{tg} (\pi + x) + 3$; 3) $\sin 2x = 2 \sin x$; 4) $\cos 2x = 2 \cos x$; 5) $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = 0$.

323. Решить уравнения:

1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$; 2) $\sin x + \cos x = 1$; 3) $\sin 5x = \sin 3x$; 4) $\cos 7x = \cos x$; 5) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$; 6) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение тригонометрических неравенств

324. Решить неравенства:

1) $\sin x > 1/2$; 2) $\sin x > \sqrt{3}/2$; 3) $\sin x < 1/2$; 4) $\sin x < \sqrt{3}/2$.

325. Решить неравенства:

1) $\cos x > -1/2$; 2) $\cos x < -1/2$; 3) $\cos x > \sqrt{2}/2$; 4) $\cos x < \sqrt{2}/2$.

326. Решить неравенства:

1) $\operatorname{tg} x > 1$; 2) $\operatorname{tg} x < 1$; 3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

ГЛАВА XIV

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразная

Функция F называется *первообразной* на заданном промежутке для функции f , если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x).$$

327. Доказать, что функция F есть первообразная для f на указанном промежутке, если

1) $F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$, $x \in]-\infty; \infty[$; 2) $F(x) = -\cos x + 2$, $f(x) = \sin x$, $x \in]-\infty; \infty[$; 3) $F(x) = e^x + 5$, $f(x) = e^x$, $x \in]-\infty; \infty[$; 4) $F(x) = \ln x + 7$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0; \infty[$.

328. Как называется операция, обратная дифференцированию?

Основное свойство первообразных

Если функция F есть первообразная для функции f на некотором промежутке, то при любой постоянной C функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции f на этом же промежутке.

Таблица 5

Таблица первообразных функций

$f(x)$	x^n ($n \neq -1$)	$\frac{1}{x}$ $x > 0$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln x + C$	$e^x + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\lg x + C$

329. Проверить дифференцированием таблицу первообразных функций.

330. Найти для функции f первообразную, график которой проходит через точку M : 1) $f(x) = x^2$, $M(1; 1)$; 2) $f(x) = \cos x$, $M(0; 1)$.

Правила нахождения первообразных

- 1) Если F — первообразная для f , G — первообразная для g , то $F + G$ — первообразная для $f + g$.
- 2) Если F — первообразная для f , k — постоянная, то kF — первообразная для kf .

331. Найти первообразные для функций:

- 1) $3x + 2$; 2) $5 \cos x + 3$; 3) $\frac{2}{x} + 3 \sin x$.

Интеграл

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$, или если $F' = f$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ или } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Это равенство называется *формулой Ньютона — Лейбница* *.

Геометрический смысл интеграла

$\int_a^b f(x) dx$ — есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции f , отрезком $[a; b]$ оси Ox , на котором задана f , и перпендикулярами, проведенными к оси Ox в точках a и b (рис. 13).

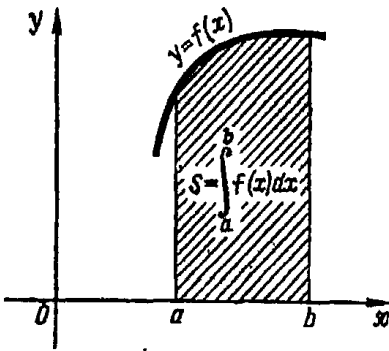


Рис. 13

332. Вычислить:

1) $\int_0^2 x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

3) $\int_1^9 \frac{dx}{x}$.

333. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

- 1) $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; 3) $y = 2 \cos x$, $y = 0$; $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; 4) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

* Раньше выражение $\int_a^b f(x) dx$ называли «определенным интегралом», сейчас называют «интегралом».

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА XV НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

Конгруэнтность фигур и перемещения. Отображения фигур

Если каким-нибудь образом каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y ,

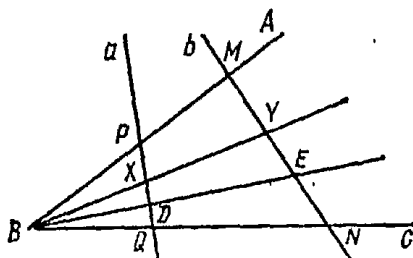


Рис. 14

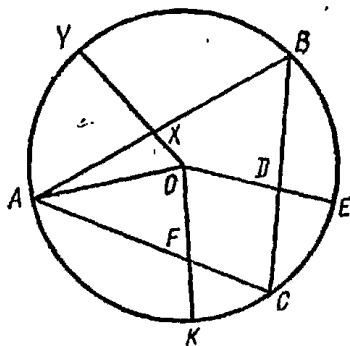


Рис. 15

то y , то говорят, что имеется *отображение** множества X в множество Y .

Пример. На рис. 14 дан угол ABC ; P, Q, M и N — точки пересечения прямых a и b со сторонами угла. Будем считать, что точке X отрезка PQ соответствует точка Y отрезка MN , лежащая на луче BX . Точка Y называется *образом* точки X , что записывается так: $X \rightarrow Y$. Образом точки D является точка E , $D \rightarrow E$, $P \rightarrow M$, $Q \rightarrow N$. Здесь дано отображение $\{PQ\}$ на $\{MN\}$.

334. На рис. 15 произвольной точке X вписанного треугольника ABC соответствует на окружности (O, r) точка Y , которая лежит на луче OX .

1. Назвать образы точек D, F и A .
2. На какую фигуру отображается сторона AB ?
3. Какая фигура отображается на дугу ABE ?

* Сравнить с определением функции, см. с. 23

Конгруэнтные фигуры

Если фигуру F можно отобразить на фигуру F_1 так, что расстояние между любыми двумя точками M и N фигуры F равно расстоянию между соответствующими им точками M_1 и N_1 фигуры F_1 , то говорят, что фигура F *конгруэнтна* фигуре F_1 .

На рис. 16 треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A_1B_1C_1$, что записывается так: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Из рис. 16 видно, что можно наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$, $M \rightarrow M_1$, $N \rightarrow N_1$.

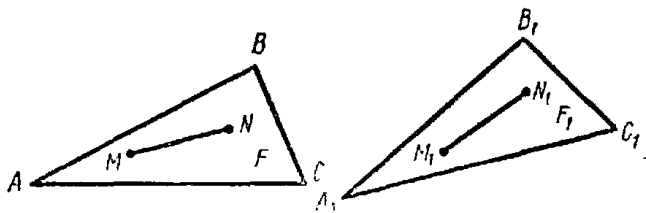


Рис. 16

Замечание. Ранее конгруэнтные фигуры называли равными. Последний термин не совсем точен. Ведь фигура есть множество точек, а два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

335. 1. Построить два конгруэнтных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$. Затем взять произвольную точку M треугольника ABC на стороне BC и построить точку M_1 , в которую перейдет точка M , если треугольники совместить.

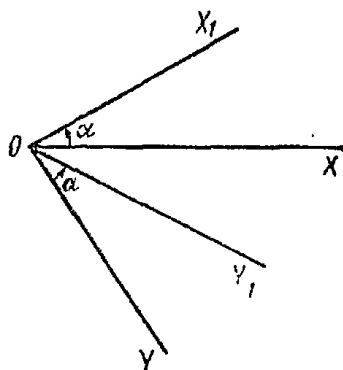


Рис. 17

2. Решить предыдущую задачу, если точка M находится внутри треугольника ABC .

Перемещения. Поворот

Отображение плоскости на себя*, сохраняющее расстояния, называется *перемещением*.

Поворотом вокруг центра O называется такое перемещение плоскости, при котором 1) точка O отображается сама на себя и 2) угол между любым лучом OX (OY) и соответствующим ему лучом OX_1 (OY_1) имеет одну и ту же величину α (рис. 17). Величина α называется *углом поворота*. Поворот вокруг центра O на угол α обозначается R_O^α или просто R^α .

* Это значит, что при отображении любая точка плоскости имеет прообраз на этой же плоскости.

336. Из центра O двух концентрических окружностей проведены лучи OA , OB и OC (см. рис. 166). Построить фигуру, на которую отобразится треугольник ABC при повороте по часовой стрелке вокруг центра O , если угол поворота $\angle AOC$.

337. Указать центр и угол поворота $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, при которых квадрат переходит сам в себя.

Центральная симметрия

Поворот вокруг центра O на 180° называется *симметрией* с центром O . На рис. 18 точки A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 симметричны друг другу относительно центра O . Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC относительно центра O .

Если фигура отображается сама на себя при центральной симметрии с центром O , то говорят, что фигура *центрально симметрична*.

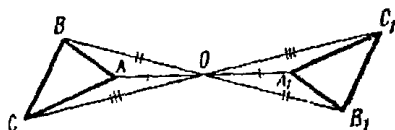


Рис. 18

338. Построить прямые, симметричные прямой a и b относительно центра O , если a и b пересекаются в точке M .

Симметрия относительно прямой (плоскости)

Точки M и M_1 называются *симметричными* относительно прямой l (плоскости α), если отрезок MM_1 перпендикулярен l (α) и делится этой прямой (плоскостью) пополам (рис. 19, а, б). Любая точка прямой l (плоскости α) считается симметричной самой себе.

Если симметрия относительно оси l (плоскости α) точку M отображает на точку M_1 , то записывают так:

$$S_l(M) = M_1; \quad S_\alpha(M) = M_1.$$

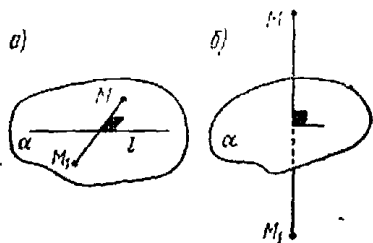


Рис. 19

339. Почему при осевой симметрии каждая фигура переходит в конгруэнтную ей фигуру?

340. Сколько осей симметрии и какие имеет: 1) отрезок; 2) круг; 3) прямоугольник; 4) ромб; 5) квадрат?

341. Внутри прямого угла BOD взята точка M и построены точки $S_{BO}(M) = M_1$, $S_{OD}(M) = M_2$. Доказать, что точки M_1 , O и M_2 лежат на одной прямой.

342. Сколько плоскостей симметрии имеет 1) отрезок; 2) равнобедренный треугольник?

343. Что называется композицией поворотов с общим центром?

344. В прямоугольной системе координат дана точка $A(2; 3)$.

1) Каковы будут координаты точки A_1 , на которую отобразится точка A при повороте на 270° с центром в начале координат?

2) Найти координаты точки A_2 , если $A_2 = R^{-90^\circ} \circ R^{180^\circ}(A)$.

345. Что называется преобразованием пространства? Привести примеры.

346. Все точки шара проектируются на плоскость. Можно ли утверждать, что это отображение является преобразованием пространства?

347. Что называется тождественным преобразованием?

348. Что называется углом между двумя направлениями?

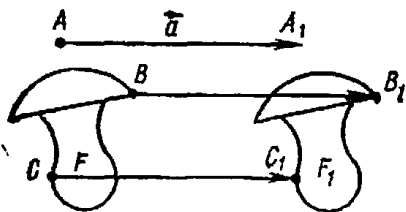
349. Что называется углом между двумя пересекающимися прямыми?

ГЛАВА XVI

ВЕКТОРЫ

Параллельный перенос

Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.



На рис. 20 изображены фигура F и фигура F_1 , получающаяся параллельным переносом фигуры F .

Вектор

Рис. 20

Параллельный перенос называют *вектором**. Вектор определяется парой (AA_1) несовпадающих точек. На рис. 20 лучи AA_1 , BB_1 , CC_1 сонаправлены и расстояния $|BB_1|$, $|CC_1|$ равны расстоянию $|AA_1|$. Эти расстояния называют *длиной вектора*. Длина вектора $\overrightarrow{AA_1}$ обозначается $|\overrightarrow{AA_1}|$.

* Раньше вектором называли направленный отрезок. Сейчас вектором называют параллельный перенос, а направленным отрезком — изображение вектора.

Один и тот же вектор можно изобразить различными способами:
 $\vec{a} = \vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1}$. Этот вектор определяет один и тот же параллельный перенос.

350. 1. Дан ненулевой вектор $\vec{AB}$. Можно ли утверждать, что $\vec{AB} = \vec{BA}$?

2. Известно, что $\vec{AB} = \vec{CD}$. Можно ли утверждать, что $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$?

3. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$, $|\vec{CD}| \neq 0$. Можно ли утверждать, что $\vec{AB} = \vec{CD}$?

351. 1. Сколько различных векторов определяет множество точек $\{A; B\}$?

2. Записать все векторы, определяемые парами точек, составленными из вершин треугольника ABC .

Координаты вектора

Пусть вектор $\vec{a} = \vec{OA}$ (рис. 21) имеет длину $|\vec{a}|$ и образует угол α с положительным направлением оси абсцисс. Координаты точки A называются координатами вектора $\vec{OA}$.

Абсцисса вектора $x_{\vec{a}} = |\vec{a}| \cos \alpha$,

а ордината $y_{\vec{a}} = |\vec{a}| \sin \alpha$.

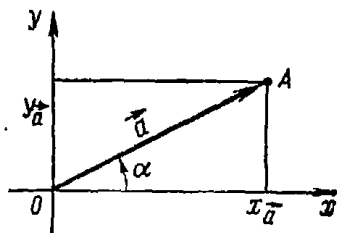


Рис. 21

352. Дан вектор $\vec{a} = \vec{OA}$ с координатами $x_{\vec{a}} = 3$; $y_{\vec{a}} = 4$.

Построить вектор 1) $R^{\frac{\pi}{4}}(\vec{a})$; 2) $R^{-\frac{\pi}{2}}(\vec{a})$; 3) $2R^{\pi}(\vec{a})$.

Сложение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора (рис. 22). Произвольную точку X вектор $\vec{a}$ отображает на точку Y , а вектор $\vec{b}$ отображает точку Y на точку Z . В результате двух отображений точка X отобразится на точку Z . Результат этой операции есть также вектор, его называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначают $\vec{a} + \vec{b}$.

* Поворот вектора $\vec{a}$ на $\frac{\pi}{4}$ рад.

353. Как с помощью геометрического построения сложить два вектора по «правилу треугольника» и «правилу параллелограмма»?

854. 1. Какие векторы называются коллинеарными?

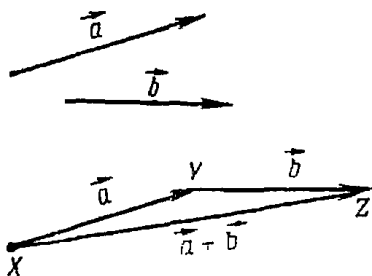


Рис. 22

2. Какие два вектора называются противоположными; как они обозначаются?

3. Можно ли считать два противоположных вектора коллинеарными?

355. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Найти сумму векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OC}$; $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$; $\vec{OA}$, $\vec{OC}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$.

356. 1. Какой вектор называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2. Как построить вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$?

357. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Выразить векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ через $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, имеющий при $a \neq 0$ направление вектора $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположное, если $k < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа k , т. е. $|\vec{ka}| = |k| |\vec{a}|$.

Для любого вектора $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

358. В ромбе $ABCD$ точка O — центр симметрии. Выразите суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ через вектор $\vec{AO}$.

359. Доказать с помощью векторов, что средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна ее половине.

360. В треугольнике ABC M и N — середины сторон AB и BC ($M \in [AB]$). Доказать, что $\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{BC} - \vec{BA})$.

361. Дан треугольник ABC , BM — медиана, проведенная к стороне AC . Выразить вектор $\vec{BM}$ через $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$.

362. Каков признак коллинеарности двух векторов?
 363. Какие векторы называются компланарными?
 364. Что называется углом между ненулевыми векторами?
 365. Чему равен угол между сонаправленными векторами; между противоположно направленными векторами?

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению числовых значений длин этих векторов на косинус угла между векторами, т. е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

366. Чему равно скалярное произведение вектора на этот же вектор?

367. 1. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?

2. Каков угол между двумя ненулевыми векторами, если их скалярное произведение равно нулю?

368. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $a=5$, $b=3$ и они образуют $\hat{\varphi}=120^\circ$.

369. В ромбе $ABCD$ $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. Выразив через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$, доказать, что $[AC] \perp [BD]$.

370. Длина каждого из ребер тетраэдра $ABCD$ равна a , точки K , L , M являются серединами ребер AB , BC и DC . Вычислить скалярные произведения 1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; 2) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; 3) $\vec{KM} \cdot \vec{DB}$.

371. Какую тройку векторов называют прямоугольным базисом?

372. Что значит разложить вектор $\vec{a}$ пространства по векторам $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$?

373. Как изобразить вектор $\vec{a}$, если его координаты x , y , z отличны от нуля?

374. Записать координатную формулу скалярного произведения двух векторов.

375. Найти длину вектора $\vec{a}=(x; y; z)$.

376. Найти скалярное произведение векторов: 1) $\vec{a}=(-4; 2; 6)$ и $\vec{b}=(6; -5; 7)$; 2) $\vec{c}=(3; 0; 6)$ и $\vec{d}=(-4; 6; 2)$.

377. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = (1; -2; 2)$ и $\vec{b} = (-3; -1,5; 3)$.

378. 1. По координатам точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ найти координаты вектора $\vec{AB}$.

2) Найти координаты вектора $\vec{AB}$, зная координаты точек $A(3; 0; -1)$ и $B(-1; -2; 3)$.

ГЛАВА XVII

ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Подобные фигуры

Определение подобия

Если фигуру F можно отобразить на фигуру F_1 так, что для любых точек A и B первой фигуры отношение расстояния $|A_1B_1|$

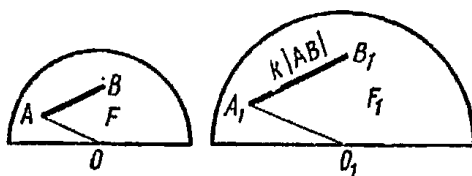


Рис. 23

между их образами к расстоянию $|AB|$ между самими точками A и B равно одному и тому же числу $k > 0$, то говорят, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k , т. е. (рис. 23)

$$\text{если } \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|O_1A_1|}{|OA|} = k, \text{ то } F_1 \sim_k F;$$

читается: «фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k ».

379. 1. Где в окружающей обстановке вы встречали подобные фигуры?

2. Можно ли конгруэнтные фигуры считать подобными?

3. Для того чтобы две фигуры были подобными, необходимо или достаточно, чтобы они были конгруэнтными?

380. План одного и того же земельного участка начерчен в двух видах: первый имеет масштаб 1:100, второй 1:500. Чему равен коэффициент подобия этих планов?

Определение гомотетии

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной

точки A является такая точка A_1 , что $\vec{OA}_1 = k\vec{OA}$. Точка O — центр гомотетии, а число k — коэффициент гомотетии; H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом k .

На рис. 24 изображена фигура F_1 , полученная из фигуры F при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $k=2$.

381. 1. В какую точку отображает гомотетия центр гомотетии?

2. Чем замечательны отображения гомотетии при $k=1$, $k=-1$?

3. Как построить точку, гомотетичную данной точке A , если даны центр O и коэффициент гомотетии k ?

382. Увеличиваются или уменьшаются расстояния между соответствующими точками при гомотетии, если: 1) $|k| > 1$; 2) $|k| < 1$; 3) $|k| = 1$?

383. 1. Все ли гомотетические фигуры подобны?

2. Все ли подобные фигуры гомотетичны?

384. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC относительно центра O . Коэффициент гомотетии $k=0,8$. Вычислить длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, если $|AB|=12$ см, $|BC|=8$ см, $|AC|=10$ см.

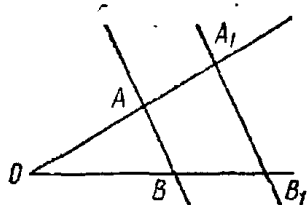


Рис. 25

385. Как построить треугольник, подобный данному, но не гомотетичный ему, с коэффициентом подобия k , равным 1,5?

386. Почему соответственные углы подобных фигур конгруэнтны?

387. Подобны ли между собой квадрат и прямоугольник; квадрат и ромб?

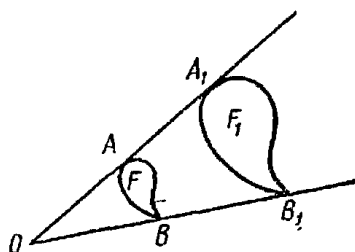


Рис. 24

Пропорциональные отрезки

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

Если дан $\angle A_1OB_1$ и $(A_1B_1) \parallel (AB)$ (рис. 25), то

$$\frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{|OB_1|}{|OB|}.$$

388. Какие отрезки называются пропорциональными?

389. Угол A пересечен двумя параллельными прямыми BC и DE (B и D лежат на одной стороне угла). Вычислить $|AD|$, если $|AB|=12$ см, $|AC|=7$ см, $|CE|=14$ см.

390. В треугольнике ABC $[DE] \parallel [AC]$ ($D \in [AB]$). Вычислить $|AC|$, если $|CE|=10$ м, $|BE|=15$ м, $|DE|=18$ м.

391. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB точкой M разделена на отрезки $|AM|=6,8$ см и $|MB|=6$ см. Из точки M проведена прямая, параллельная основаниям, до пересечения в точке N с боковой стороной CD . Найти $|CD|$, если $|CN|=9$ см.

Признаки подобия треугольников

1. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$|AB|:|A_1B_1|=|BC|:|B_1C_1|=|AC|:|A_1C_1|=k,$$

то

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$\hat{A}=\hat{A}_1, \quad \hat{B}=\hat{B}_1,$$

то

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

3. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$|AB|:|A_1B_1|=|BC|:|B_1C_1|=k \text{ и } \hat{B}=\hat{B}_1,$$

то

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

392. Подобны ли любые два равнобедренных треугольника?

393. Стороны трех треугольников равны: 1) 5, 4, 6 см; 2) 15, 12, 14,4 дм; 3) 5, 4, 4,8 см. Какие из этих треугольников подобны?

394. Стороны треугольника увеличили в два раза. Что можно утверждать об углах этих треугольников?

395. Один из углов одного равнобедренного треугольника содержит 68° , а другого равнобедренного треугольника — 56° . Могут ли быть подобны эти треугольники?

396. Сформулируйте признак подобия треугольников, если эти треугольники: 1) прямоугольные; 2) равнобедренные.

397. Всегда ли подобны равнобедренные треугольники, если они имеют по конгруэнтному острому углу?

398. Два угла данного треугольника равны 54° и 18° . Доказать, что биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, отсекает от треугольника треугольник, подобный данному.

399. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведена высота. Указать на чертеже три пары подобных треугольников и объяснить, почему они подобны.

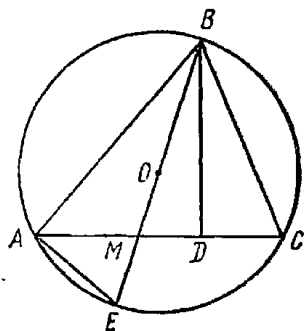


Рис. 26

400. Треугольник ABC вписан в окружность (рис. 26), BD — высота треугольника, BE — диаметр, пересекающий AC в точке M . Доказать, что 1) $\triangle BDC \sim \triangle ABE$; 2) $\triangle AEM \sim \triangle BMC$.

401. На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $\hat{A}BD = \hat{A}CB$. Вычислить стороны треугольника ABD , если $|AB| = 8$ см, $|BC| = 6$ см, $|AC| = 12$ см.

402. В треугольнике ABC , где $\hat{B} > \hat{A}$, проведена прямая BD ($D \in AC$) так, что $\hat{DBC} = \hat{BAC}$. В полученном треугольнике DBC $|DC| = 10$ см, $|BC| = 12$ см и $|BD| = 15$ см. Вычислить $|AB|$ и $|AD|$.

Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

Если в прямоугольном треугольнике ABC c — длина гипотенузы, a и b — длины катетов, измеренные одной и той же единицей, то $c^2 = a^2 + b^2$.

403. Проекции данного отрезка на стороны прямого угла равны a и b . Найти длину отрезка.

404. Высота равнобедренного треугольника равна 15 см, а основание равно 16 см. Вычислить длину отрезка, проведенного внутри треугольника через середину основания параллельно боковой стороне.

405. В прямоугольнике с основанием 12 см и диагональю 15 см увеличили высоту на 7 см. Найти диагональ полученного прямоугольника.

406. Основания прямоугольной трапеции 11 и 18 см, большая боковая сторона равна 25 см. Найти периметр трапеции.

407. Высота AD равнобедренного треугольника ABC делит боковую сторону BC на отрезки $|CD|=2$ см и $|DB|=3$ см, считая от основания. Определить высоту $|DE|$ треугольника ABD .

408. Стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$). Одна из диагоналей перпендикулярна его стороне. Найти длину диагоналей.

409. 1. В прямоугольной трапеции диагонали равны 10 и 7,5 см, меньшая боковая сторона 6 см. Вычислить другую боковую сторону.

2. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 8 дм, а высота 6 дм. Определить диагонали трапеции.

3. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 7 см, диагональ 8 см, средняя линия 4 см. Вычислить основания.

4. Основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равны 36 и 16 см. Вычислить диаметр окружности.

5. Найти радиус окружности, описанной около трапеции, у которой основания равны 16 и 12 см, а высота 14 см и центр окружности расположен внутри трапеции.

410. 1. Диагонали ромба равны 12 и 16 см. Вычислить радиус вписанного круга.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Вычислить радиус вписанного круга.

3. Две конгруэнтные окружности радиуса R пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой. Найти длину их общей хорды.

ГЛАВА XVIII

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Из прямоугольного треугольника ABC (рис. 27) имеем

$$\begin{aligned} \sin \hat{A} &= \frac{a}{c} \quad \begin{array}{l} a = c \sin \hat{A} \\ c = \frac{a}{\sin \hat{A}} \end{array}, & \cos \hat{A} &= \frac{b}{c} \quad \begin{array}{l} b = c \cos \hat{A} \\ c = \frac{b}{\cos \hat{A}} \end{array}, \\ \operatorname{tg} \hat{A} &= \frac{a}{b} \rightarrow a = b \operatorname{tg} \hat{A}, & \operatorname{ctg} \hat{A} &= \frac{b}{a} \rightarrow b = a \operatorname{ctg} \hat{A}. \end{aligned}$$

Эти соотношения являются «азбукой», необходимой для решения задач по геометрии с применением тригонометрии. Поэтому их надо твердо знать для любых положений прямоугольного треугольника.

411. 1. Как найти катет прямоугольного треугольника, если известны его гипотенуза и острый угол?

2. Как найти катет прямоугольного треугольника, если известны другой его катет и острый угол?

3. Как найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны его катет и острый угол?

4. Пользуясь обозначениями рис. 28, в следующих выражениях дописать различные недостающие тригонометрические функции углов прямоугольных треугольников ABD и BDC :

$$h=c \dots, h=c \dots, h=p \dots, h=p \dots,$$

$$h=a \dots, h=a \dots, h=q \dots, h=q \dots,$$

$$c=\frac{h}{\dots}, c=\frac{h}{\dots}, a=\frac{h}{\dots}, a=\frac{h}{\dots}, c=\frac{p}{\dots}, c=\frac{p}{\dots}.$$

5. Выразить p (рис. 28) через c и функции угла α , через c и функции угла β .

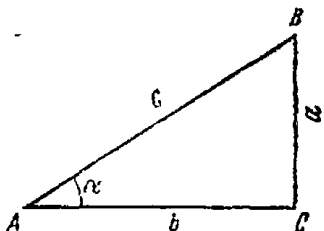


Рис. 27

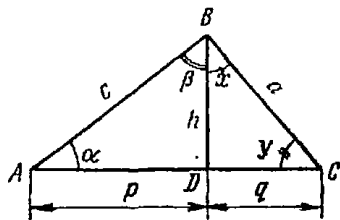


Рис. 28

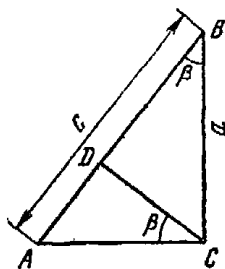


Рис. 29

6. Выразить q и a (рис. 28) через h и функции углов x , через h и функции углов y .

412. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 29) катет $|BC|=a$, $\hat{B}=\beta$. Из вершины прямого угла на гипотенузу опущена высота CD . Найти $|AB|$, $|AC|$, $|CD|$, $|BD|$ и $|AD|$.

413. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α . Найти периметр этого треугольника.

414. В прямоугольном треугольнике катет равен b , а прилежащий ему угол равен α . Найти 1) периметр тре-

угольника; 2) радиус описанной окружности; 3) медиану гипотенузы; 4) расстояние от точки пересечения высот до центра описанного круга.

415. В прямоугольной трапеции большее основание равно a , острый угол равен α , меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найти 1) высоту трапеции; 2) меньшее основание.

416. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция с боковой стороной a . Определить углы этой трапеции.

417. Определить углы ромба, если его большая диагональ равна d_1 , а меньшая d_2 .

418. Определить угол при основании равнобедренного треугольника по высоте его h и радиусу вписанного круга r .

Теорема косинусов

Во всяком треугольнике (рис. 30) квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

419. 1. Доказать, что приведенная формула остается верной и для гипотенузы прямоугольного треугольника.

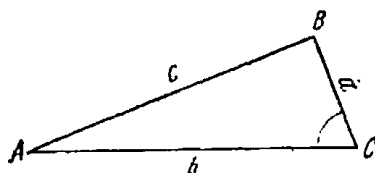


Рис. 30

2. С помощью теоремы косинусов написать, чему равны стороны a и b (рис. 30).

3. Какие основные элементы треугольника можно определить с помощью теоремы косинусов?

420. 1. В треугольнике ABC стороны равны a , b и c .

Какая существует зависимость между сторонами, если A — прямой, $\hat{A}$ — острый и $\hat{A}$ — тупой ($\angle A$ — лежит против стороны a)?

2. Как по трем данным сторонам треугольника установить, будет ли он прямоугольным, остроугольным или тупоугольным?

421. Стороны треугольника равны a и b . Найти третью сторону c , если угол между известными сторонами равен: 1) 60° ; 2) 45° ; 3) 120° .

422. Вершина A равностороннего треугольника ABC соединена с точкой D , делящей сторону BC на отрезки $|BD|=2$ см и $|DC|=3$ см. Вычислить отрезок $|AD|$.

423. Определить меньшую диагональ правильного шестиугольника, если сторона его равна a .

424. В треугольнике ABC $a=7$, $b=8$, $c=5$. Вычислить $\hat{A}$.

425. Стороны параллелограмма равны a и b , угол между ними α . Найти диагонали d_1 и d_2 .

426. Пользуясь теоремой косинусов, доказать теорему: «Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон».

427. В треугольнике ABC $a=7$ см, $b=11$ см и $c=14$ см. Найти медиану, проведенную на сторону c .

Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов, т. е.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}},$$

где a , b и c — стороны треугольника, $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ — противолежащие им углы.

428. 1. Какой геометрической величине равно каждое из отношений формулы теоремы синусов?

2. Как найти сторону треугольника, если известны противолежащий угол и диаметр описанного круга?

3. Как относятся между собой две стороны любого треугольника?

4. Справедлива ли теорема синусов для прямоугольного треугольника?

5. Какие основные элементы треугольника можно найти с помощью теоремы синусов?

429. В треугольнике ABC известны a , $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$. Найти b и c .

430. В прямоугольном треугольнике даны катет a и прилежащий к нему угол β . Определить длину биссектрисы прямого угла.

431. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна 12 см и пересекает противоположную

сторону под углом 135° (угол обращен к основанию). Найти 1) основание треугольника; 2) радиус описанного круга.

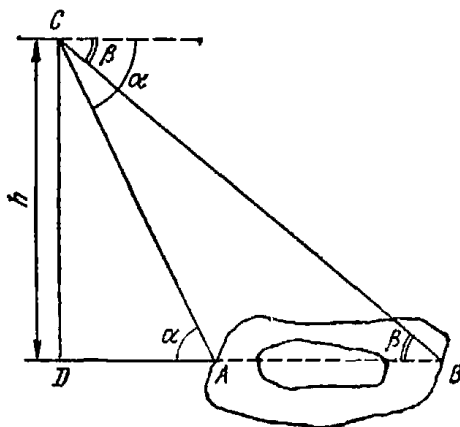


Рис. 31

432. Для определения ширины непроходимого болота с вертолета, находящегося на высоте h , измерили углы α и β (рис. 31). Найти ширину болота AB .

ГЛАВА XIX

ПЛОЩАДИ МНОГУГОЛЬНИКОВ.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Площадь прямоугольника и квадрата

Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон *, т. е. (рис. 32)

$$S_{\text{пр}} = ah \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь квадрата равна квадрату его стороны, т. е. (рис. 33)

$$S_{\text{кв}} = a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

433. 1. Пастбище прямоугольной формы ограждено изгородью; его длина 250 м, ширина 40 м. На сколько погонных метров изгороди потребовалось бы меньше для ограждения пастбища, если бы оно было той же площади, но квадратной формы?

2. На сколько квадратных метров увеличится площадь пастбища, если этой же изгородью оградить участок квадратной формы?

* Под стороной прямоугольника понимается длина его стороны.

434. Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить на 50%, а высоту уменьшить на 50%?

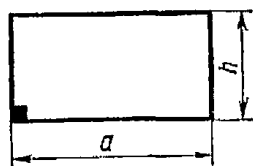


Рис. 32

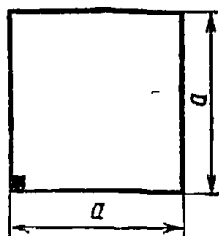


Рис. 33

435. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает BC в точке E ; $|BE|=m$, $|BC|=n$. Найти площадь прямоугольника.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, т. е. (рис. 34)

$$S_{\text{пар}} = ah \text{ (кв. ед.)}.$$

Если стороны параллелограмма a и b , а угол между ними φ , то его площадь $S_{\text{пар}} = ab \sin \varphi$ (кв. ед.).

436. Найти площадь параллелограмма, если две его стороны равны a и b , а угол между ними: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 120° .

437. Найти площадь параллелограмма, у которого: 1) две высоты равны 5 и 6 см, а угол между высотами равен 30° ; 2) периметр равен 21 см, а высоты 4 и 3 см.

438. Площадь параллелограмма равна 64 см^2 , а расстояния сторон от точки пересечения диагоналей равны 2,5 и 4 см. Найти стороны параллелограмма.

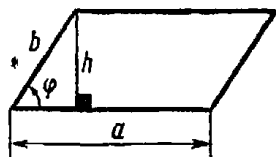


Рис. 34

439. Определить площадь параллелограмма по данным его сторонам a и b и углу между его диагоналями α .

440. Определить площадь параллелограмма, если известны его острый угол α и диагонали d_1 и d_2 .

Площадь ромба

Площадь ромба равна произведению его основания на высоту (рис 35):

$$S_{\text{ромба}} = ah \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (рис. 36):

$$S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \text{ (кв. ед.)}.$$

441. Найти площадь ромба, если его сторона равна a , а радиус вписанного круга r .

442. Около круга радиуса r описан ромб с углом в 150° . Определить площадь этого ромба.

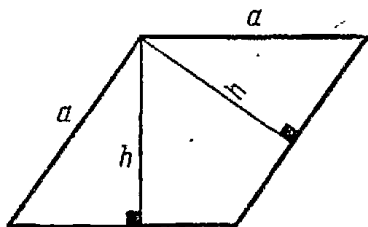


Рис. 35

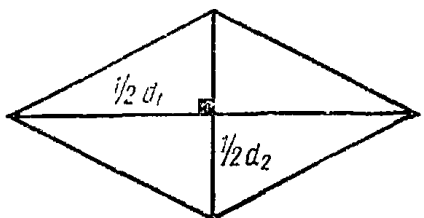


Рис. 36

443. Определить площадь ромба по его меньшей диагонали d и острому углу ромба α . Какой вид примет полученная формула, если $\alpha = 90^\circ$?

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, т. е. (рис. 37)

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} ah \text{ (кв. ед.)},$$

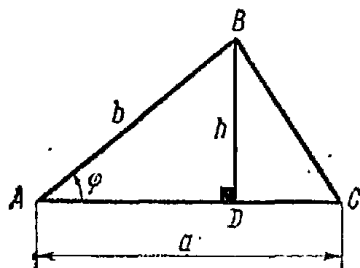


Рис. 37

или площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла между ними, т. е. (рис. 37)

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} ab \sin \varphi \text{ (кв. ед.)}.$$

Формула площади треугольника по трем его сторонам (формула Герона) имеет вид

$$S_{\text{тр}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

444. 1. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $h_c = ab/c$, где h_c — высота, опущенная на гипотенузу, a и b — катеты, c — гипотенуза.

2. Найти площадь прямоугольного треугольника, если один из катетов равен b , а прилежащий к нему острый угол α .

3. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна c , а острый угол α .

4. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанного около него круга равен R , высота, опущенная на гипотенузу, равна h .

5. Найти площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 3 и 7,2 см.

445. 1. Каким построением можно разбить любой треугольник на равновеликие треугольники?

2. В треугольнике ABC точка M — середина медианы BD ($D \in AC$). Доказать, что треугольники ABD и AMC равновелики.

446. Найти площадь равнобедренного треугольника, если 1) угол при вершине равен α , основание равно a ; 2) угол при вершине равен α , высота равна h ; 3) угол при основании равен α , а радиус вписанного круга равен r ; 4) угол при основании равен α , а боковая сторона равна b .

447. Найти площадь равностороннего треугольника, если 1) сторона его равна a ; 2) высота его равна h ; 3) радиус описанного круга равен R ; 4) радиус вписанного круга равен r .

448. Найти сторону равностороннего треугольника, если его площадь равна Q .

449. Две стороны треугольника соответственно равны 5 и 6 см, а площадь 12 см. Вычислить третью сторону.

450. Доказать, что в треугольнике со сторонами a , b , c и площадью S справедливы формулы 1) $r = S/p$, где r — радиус вписанного круга, p — его полупериметр; 2) $R = \frac{abc}{4S}$, где R — радиус описанного круга; 3) площадь описанного многоугольника $S = pr$, где p — полупериметр многоугольника, r — радиус вписанного круга.

451. По сторонам треугольника $a=15$, $b=14$, $c=13$ вычислить его 1) площадь, 2) высоту, 3) радиус вписанного круга, 4) радиус описанного круга.

452. Доказать, что площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту, т. е. (рис. 38)

$$S_{\text{трап.}} = \frac{a+b}{2} h \text{ (кв. ед.)}.$$

453. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если 1) нижнее основание равно 20 см, боковая сторона 12 см, а угол при верхнем основании 120° ; 2) верхнее основание равно 15 см, боковая сторона 10 см, а угол при нижнем основании 60° .

454. Определить площадь равнобедренной трапеции, в которой даны основания a и b ($a > b$) и угол при большем основании α .

455. В равнобедренной трапеции верхнее основание a равно боковой стороне, а тупой угол при меньшем основании равен α . Найти площадь трапеции.

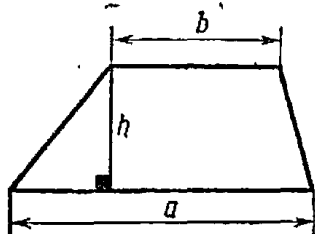


Рис. 38

456. В равнобедренной трапеции диагональ $d = 16$ см образует с большим основанием угол $\alpha = 60^\circ$. Найти площадь трапеции.

457. Найти площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны и каждая из них равна d .

458. Основания трапеции a и b . Как относятся площади частей, на которые делится трапеция ее средней линией?

Отношение площадей подобных треугольников и многоугольников

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

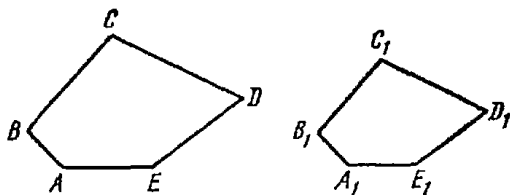


Рис. 39

Если многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 39) и

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|CD|}{|C_1D_1|} = \frac{|DE|}{|D_1E_1|} = k$$

(k — коэффициент подобия), то

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = k^2.$$

459. Сходственные стороны двух подобных треугольников относятся, как 3:2. Найти отношение их площадей.

460. На плане участка принят масштаб 1:1000. Во сколько раз площадь участка в действительности больше, чем его площадь на плане?

461. Средняя линия треугольника делит его на две части. Во сколько раз площадь полученной трапеции больше площади отсеченного треугольника?

462. Сторона треугольника равна 5 см. Найти сходственную сторону подобного треугольника, площадь которого была бы в четыре раза больше.

463. Как построить многоугольник, подобный данному, чтобы площадь построенного многоугольника была в 9 раз больше площади данного?

Длина окружности и площадь круга

464. 1. Дать определение длины окружности.

2. Как выражается длина окружности а) через радиус, б) через диаметр?

3. Что показывает число π ?

465. С помощью вписанного в окружность правильного шестиугольника и описанного около нее правильного четырехугольника доказать, что число π больше 3 и меньше 4.

466. Катеты прямоугольного треугольника равны 2 и 4,8 дм. Вычислить длину окружности, вписанной в треугольник.

467. 1. Как выражается площадь круга а) через длину окружности и радиус; б) через радиус; в) через диаметр? Сформулировать написанные формулы.

2. Как относятся площади двух кругов?

3. Площадь круга увеличили в четыре раза. Как изменится при этом радиус круга?

468. 1. Если увеличить радиус круга R на 1 см, то на сколько увеличится а) длина окружности; б) площадь круга?

2. На сколько процентов увеличится площадь круга, если радиус увеличить на 100%?

3. На сколько процентов уменьшится площадь круга, если его радиус r уменьшить на 25%?

469. Из квадрата нужно вырезать круг наибольшего диаметра. Сколько процентов материала пойдет на обрезки?

470. Две водопроводные трубы одинаковых диаметров надо заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Вычислить диаметр большой трубы.

471. Площадь круга, радиус которого равен 8 см, разделена пополам concentрической окружностью. Определить радиус этой окружности.

472. В квадрат вписаны четыре круга, касающиеся друг друга и сторон квадрата. Доказать, что сумма их площадей равна площади круга, вписанного в квадрат.

473. Около треугольника со стороной a и противолежащим ей углом α описана окружность. Найти длину этой окружности и площадь описанного круга.

ГЛАВА XX

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Признак параллельности прямой и плоскости

Теорема. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Если $(CD) \subset \alpha$ и $(AB) \parallel (CD)$, то $(AB) \parallel \alpha$ (рис. 40).

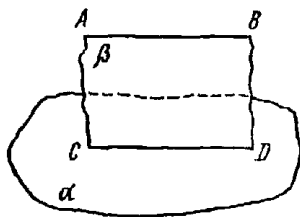


Рис. 40

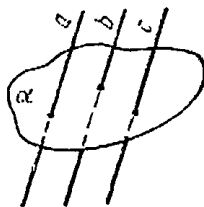


Рис. 41

Обратная теорема. Если через прямую, параллельную плоскости, проходит другая плоскость, пересекающая первую, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.

Если $(AB) \parallel \alpha$ и $\beta \supset AB$, $\beta \cap \alpha = (CD)$, то $(CD) \parallel (AB)$.

Транзитивность параллельности прямых

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$ (рис. 41).

474. 1. Сторона AC $\triangle ABC$ расположена на плоскости P , а вершина B находится вне плоскости. Как расположена относительно P средняя линия, соединяющая середины сторон AB и BC ?

2. Доказать, что каждое ребро прямоугольного параллелепипеда параллельно двум его граням.

475. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: 1) $[AB] \parallel [D_1 C_1]$; 2) $[BC] \parallel [A_1 D_1]$; 3) $[AA_1] \parallel [CC_1]$; 4) $[BB_1] \parallel [DD_1]$.

Признаки параллельности двух плоскостей

1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Если $(AB) \subset \alpha$, $(AC) \subset \alpha$, $(AB) \cap (AC) = A$, $(A_1 B_1) \subset \beta$, $(A_1 C_1) \subset \beta$, $(A_1 B_1) \parallel (AB)$, $(A_1 C_1) \parallel (AC)$, то $\alpha \parallel \beta$ (рис. 42).

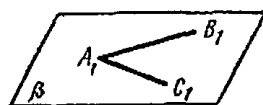
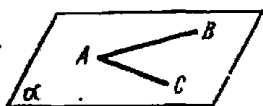


Рис. 42

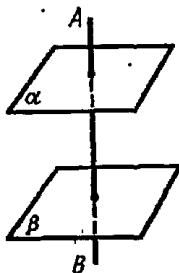


Рис. 43

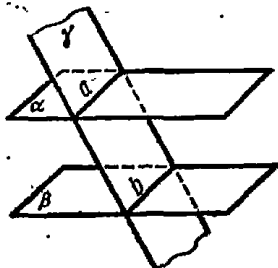


Рис. 44

2. Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

Если $\alpha \perp (AB)$ и $\beta \perp (AB)$, то $\alpha \parallel \beta$ (рис. 43).

476. Доказать, что противоположные грани параллелепипеда параллельны между собой.

477. Если две параллельные прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то будут ли эти плоскости параллельны?

478. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение через вершины A , B_1 и C . Доказать, что оно параллельно сечению, проведенному через вершины A_1 , D и C_1 .

Теорема о параллельных плоскостях

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны.

Если $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, то $a \parallel b$ (рис. 44).

479. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A , C и M — середину ребра $B_1 C_1$.

480. На ребрах BC и A_1D_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки M и N . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через M и N , параллельной ребру AB .

ГЛАВА XXI

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ДВУГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Прямая, перпендикулярная к плоскости

Прямая называется *перпендикуляром к плоскости*, если она перпендикулярна ко всем прямым этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Если (OA) и (OB) расположены на пл. α (рис. 45) и $(SO) \perp (OA)$, $(SO) \perp (OB)$, то $(SO) \perp \alpha$.

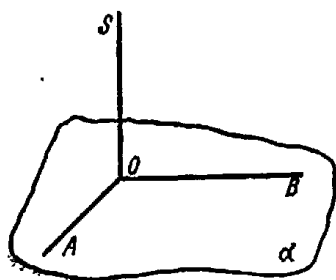


Рис. 45

481. Будет ли прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярной тем прямым (на этой плоскости), которых она не пересекает?

482. Если SO — высота тетраэдра $SABC$, то почему треугольники SAO , SBO и SCO — прямоугольные?

483. Из точки D , взятой на высоте SO , пирамиды опущен перпендикуляр $[DE]$ на боковую грань. Почему треугольник SDE — прямоугольный?

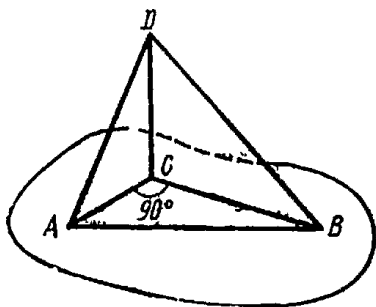


Рис. 46

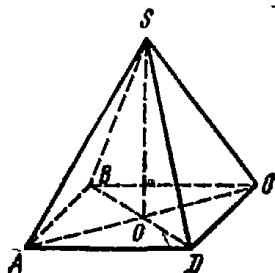


Рис. 47

484. Как проверить с помощью чертежного треугольника, перпендикулярен ли карандаш плоскости стола?

485. Прямая перпендикулярна только одной прямой на плоскости. Перпендикулярна ли она этой плоскости? Привести примеры.

486. Из вершины C прямого угла $\triangle ABC$ (рис. 46) проведен перпендикуляр $[CD]$ к его плоскости. Как расположены сторона $[AC]$ относительно плоскости DCB и сторона $[BC]$ относительно плоскости ACD ?

487. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 47) SO — высота. Доказать, что $[SD] \perp [AC]$; $[AS] \perp [BD]$.

488. Из точки K — середины стороны AB равнобедренного треугольника ABC — восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр KL . Точка L соединена с точкой C . Доказать, что $[CL] \perp [AB]$.

Перпендикуляр и наклонные к плоскости

Если через точку, не принадлежащую плоскости, проведены к ней две наклонные, то 1) для равенства длин наклонных необходимо и достаточно равенство длин их проекций; 2) длина той наклонной больше, которая имеет большую проекцию.

Если $(SO) \perp \alpha$ (рис. 48), SA , SB и SC — наклонные и $[OA] = [OB]$, то $[SA] = [SB]$; если $[SA] = [SB]$, то $[OA] = [OB]$; если $[OC] > [OB]$, то $[SC] > [SB]$.

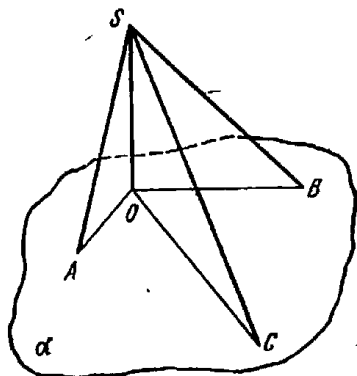


Рис. 48

489. Из точки пересечения диагоналей прямоугольника к его плоскости восставлен перпендикуляр. Доказать, что произвольная точка этого перпендикуляра находится на одинаковом расстоянии от вершин прямоугольника.

490. Вне плоскости $\triangle ABC$ взята точка M , одинаково удаленная от вершин треугольника. Доказать, что проекция точки M на плоскость треугольника есть центр описанного около него круга.

491. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника лежит точка, удаленная от каждой вершины треугольника на 13 см?

492. Из вершины B тупого угла равнобедренного $\triangle ABC$ к его плоскости восставлен перпендикуляр BM . Конеч

его M соединен с вершинами A и C и с серединой D стороны AC . Сравнить длины наклонных MA , MC и MD .

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, расположенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Если (AB) — наклонная к плоскости α (рис. 49), (OB) — ее проекция, $(CD) \subset \alpha$ и $(CD) \perp [(BO)]$, то $(CD) \perp [AB]$.

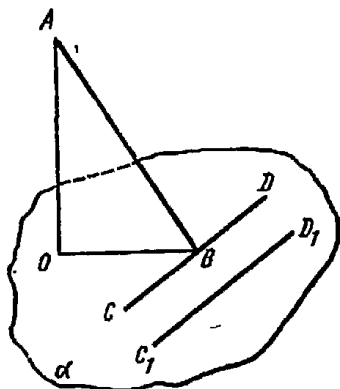


Рис. 49

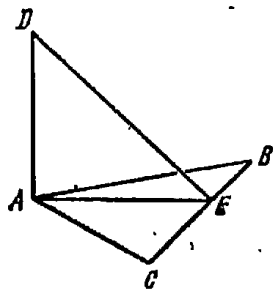


Рис. 50

Обратная теорема. Если прямая, расположенная в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и ее проекции.

Если (AB) — наклонная к плоскости α (рис. 49), $[OB]$ — ее проекция, $(CD) \subset \alpha$ и $(CD) \perp (AB)$, то $(CD) \perp (OB)$.

493. Справедлива ли теорема о трех перпендикулярах, если прямая C_1D_1 , расположенная на плоскости α (рис. 49), перпендикулярна (OB) , но не проходит через основание наклонной B ?

494. В $\triangle ABC$ (рис. 50) AE — высота, AD — отрезок, перпендикулярный плоскости $\triangle ABC$. Какой угол образуют между собой отрезки DE и BC ; BC и AD ?

495. Из вершины A треугольника ABC (рис. 50) проведен к его плоскости перпендикуляр AD и из точки D проведен отрезок, перпендикулярный BC . Какие должны бы быть выполнены условия, чтобы этот перпендикуляр а) пересекал середину BC ; б) проходил через вершину C ?

496. Дан прямоугольник $ABCD$. BK — отрезок, перпендикулярный плоскости прямоугольника. Конец его K соединен отрезками прямых с вершинами A , C и D . Доказать, что треугольники KCD и KAD — прямоугольные.

497. Вне плоскости $\triangle ABC$ взята точка M , одинаково удаленная от сторон треугольника. Доказать, что проекция точки M на плоскость треугольника есть центр вписанного в треугольник круга.

498. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 51). Доказать, что сечение $AB_1 C_1 D$ — прямоугольник.

Угол между прямой и плоскостью

Углом между наклонной прямой и плоскостью называется острый угол между этой наклонной и ее проекцией на плоскость.

На рис. 52 AB — наклонная к плоскости α , BC — ее проекция, $\angle ABC$ — угол между (AB) и плоскостью α .

499. На плоскости α (рис. 52) проведены несколько прямых, с которыми прямая AB или пересекается, или

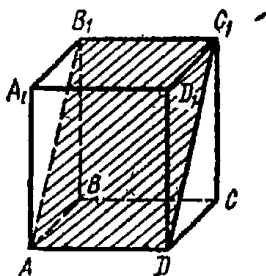


Рис. 51

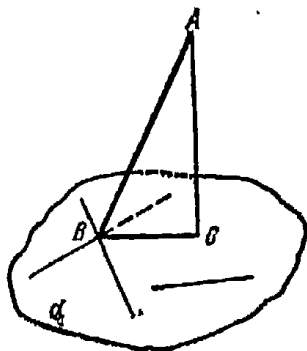


Рис. 52

скрещивается. Указать наименьший угол между прямой AB и прямыми, принадлежащими плоскости α .

500. 1. Построить угол наклона высоты пирамиды к плоскости одной из ее боковых граней.

2. Доказать, что высота правильной четырехугольной пирамиды одинаково наклонена к ее боковым граням.

501. Точка отстоит от плоскости на расстояние h . Определить длину наклонной, проведенной из этой точки под углом α к плоскости.

502. Из точки, взятой вне плоскости, проведены к плоскости перпендикуляр и две наклонные. Одна из наклонных равна 12 см и образует с плоскостью угол в 30° . Длина второй наклонной равна 10 см. Найти проекции наклонных на плоскость.

503. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии h , проведены две наклонные под углом α к плоскости, причем их проекции составляют между собой угол β . Определить расстояние между основаниями наклонных.

Скрещивающиеся прямые

Скрещивающимися прямыми называются две прямые, которые не могут быть расположены в одной плоскости.

На рис. 53 прямые AB и CD скрещиваются.

504. Перечислить все возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

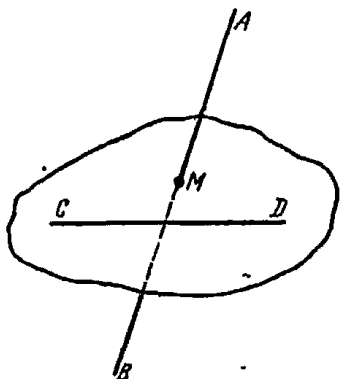


Рис. 53

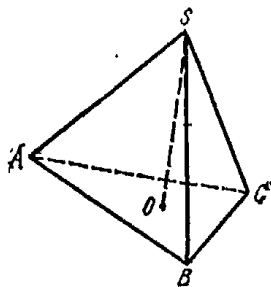


Рис. 54

505. Дана каркасная модель тетраэдра $SABC$ (рис. 54). Указать на этой модели пары скрещивающихся ребер.

506. Каков признак скрещивающихся прямых?

Угол между двумя скрещивающимися прямыми

507. Как построить угол между двумя скрещивающимися прямыми? Какие прямые в пространстве называются взаимно перпендикулярными?

508. Как расположены высота пирамиды SO (рис. 54) и стороны ее основания? Каков угол между ними?

509. Прямые AB и CD параллельны. Прямая EF пересекает (AB) под углом 60° и не пересекает (CD) . Найти угол между (EF) и (CD) .

510. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти углы, образуемые 1) прямыми $D_1 C$ и AB ; 2) прямой, проведенной через центр верхнего основания параллельно стороне этого основания, и диагональю BD нижнего основания; 3) между ребром AA_1 и диагональю $B_1 D$.

Параллельная проекция

511. Что называется параллельной проекцией точки на плоскость?

512. 1. Что называется параллельной проекцией фигуры на плоскость?

2. Сформулировать свойства параллельной проекции.

513. Может ли 1) изображением данного треугольника служить произвольный треугольник; 2) изображением данного четырехугольника — произвольный четырехугольник; 3) изображением трапеции — параллелограмм; 4) изображением ромба — квадрат?

514. Какое проектирование называется ортогональным (прямоугольным) на плоскость?

515. 1. Всегда ли проекция отрезка является отрезком?

2. Может ли проекция отрезка быть длиннее самого отрезка? короче самого отрезка?

516. Треугольник ABC лежит в плоскости α , параллельной плоскости β . Доказать, что проекция треугольника ABC на плоскость β есть треугольник, конгруэнтный треугольнику ABC .

517. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямой BC . Катеты AC и BC соответственно равны 4 и 3 см, длина проекции одного из катетов равна 2 см. Найти длину проекции гипотенузы.

Двугранные углы

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, а также часть пространства, ограниченная этими полуплоскостями.

Линейным углом двугранного угла называется такой плоский угол, у которого вершина находится на ребре двугранного угла, а лучи проведены по его граням перпендикулярно ребру.

На рис. 55 из точки O ребра AB двугранного угла $\alpha AB \beta$ проведены $[OC] \perp (AB)$ и $[OD] \perp (AB)$; $\angle COD$ — линейный угол этого двугранного угла.

518. Как надо пересечь плоскостью данный двугранный угол, чтобы получить линейный угол двугранного угла?

519. Доказать, что плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла.

520. Почему величина линейного угла данного двугранного угла не зависит от того, в каком месте его ребра взята вершина линейного угла?

521. Что называется углом между двумя пересекающимися плоскостями?

522. В кубе проведено диагональное сечение. Определить величину двугранного угла, образованного этим сечением и одной из боковых граней.

523. Основанием пирамиды $SABCD$, высота SB которой проходит через вершину основания B , служит квадрат.

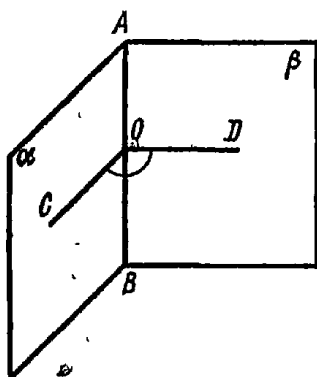


Рис. 55

Указать линейные углы, образованные гранями DSC и ASD с основанием, и вычислить эти углы, если $|SB| = |AB|$.

524. Гипотенуза c прямоугольного треугольника расположена на плоскости, а вершина прямого угла вне ее. Найти расстояние этой вершины от данной плоскости, если острый угол этого треугольника равен 30° , а плоскость треугольника составляет с данной плоскостью угол в 45° .

525. Катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) расположен на плоскости α , а вершина A вне ее. Плоскость треугольника составляет с плоскостью α угол, равный 60° . Найти расстояние от вершины A до плоскости α , если $|AB| = 13$ см, а $|BC| = 5$ см.

526. Основание AC равнобедренного треугольника ABC лежит в плоскости α , а вершина его B удалена от плоскости на расстояние OB , равное 6 см. Чему равен двугранный угол, образованный плоскостью треугольника и плоскостью α , если $|AC| = 10$ см и $|AB| = |BC| = 13$ см?

Перпендикулярные плоскости

Две плоскости называют взаимно перпендикулярными, если угол между ними равен 90° , что записывают так: $\alpha \perp \beta$.

Признак перпендикулярности плоскостей

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Если $(AB) \perp \alpha$, $(AB) \subset \beta$, то $\beta \perp \alpha$ (рис. 56).

527. Если две плоскости перпендикулярны и в одной из них проведен перпендикуляр к линии их пересечения, то он служит перпендикуляром к другой плоскости. Доказать.

528. В кубе через боковые ребра проведены диагональные сечения. Доказать, что плоскости сечения взаимно перпендикулярны.

529. В пирамиде $SABC$ (рис. 57) SM — высота боковой грани. Из точки O — основания высоты SO — проведен

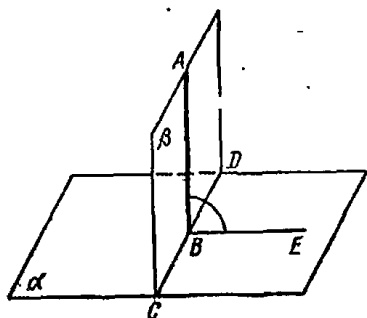


Рис. 56

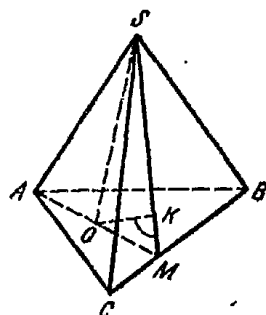


Рис. 57

перпендикуляр OK на боковую грань SCB . Доказать, что
1) плоскость OSM перпендикулярна плоскости SCB ;
2) $[OK]$ пересекает $[SM]$.

Многогранные углы

Свойства плоских углов, трехгранного и многогранного углов

Если даны многоугольник $ABCD\dots$ и точка S , не принадлежащая его плоскости, то объединение всех лучей, имеющих общее начало S

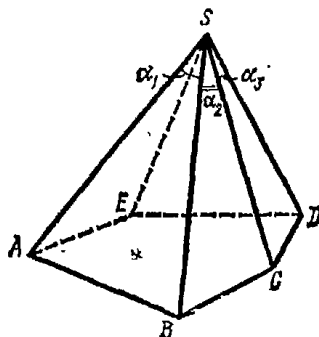


Рис. 58

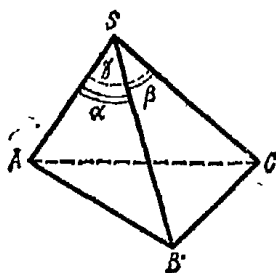


Рис. 59

и пересекающих данный многоугольник (рис. 58), называют *многогранным углом*.

Величина каждого плоского трехгранного угла меньше суммы величин двух других его плоских углов. В трехгранном угле $SABG$ (рис. 59) $\gamma < \alpha + \beta$.

В многогранном угле сумма величин плоских углов меньше 360° .
В многогранном угле $SABC\dots$ (см. рис. 58)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots < 360^\circ.$$

530. Сколько двугранных и трехгранных углов имеет
1) куб; 2) тетраэдр?

531. Можно ли образовать трехгранный угол с такими плоскими углами: 1) 120° , 80° и 40° ; 2) 110° , 80° и 40° ; 3) 150° , 140° и 80° ?

532. Могут ли плоские углы четырехгранного угла быть равны 1) 70° , 80° , 120° , 90° ; 2) 20° , 30° , 40° , 120° ; 3) 30° , 40° , 50° , 100° ?

Площадь проекции многоугольника

Площадь проекции треугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции.

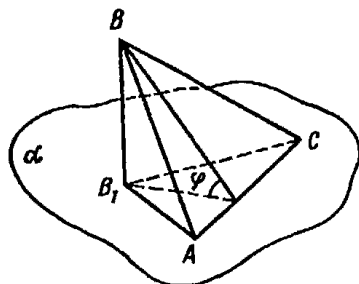


Рис. 60

Если треугольник AB_1C есть проекция треугольника ABC на плоскость α (рис. 60), φ — угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью α , то $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$. Теорема верна и для многоугольника.

533. Площадь основания прямого параллелепипеда равна S . Плоскость, пересекающая все боковые ребра параллелепипеда, образует с плоскостью основания угол α . Найти площадь сечения.

ГЛАВА XXII

МНОГОГРАННИКИ

Призма

Призмой называется многогранник, две грани которого — n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы.

На рис 61 изображена прямая пятиугольная призма.

534. Какая призма называется а) прямой; б) наклонной; в) правильной?

535. Что больше: длина высоты призмы или длина ее бокового ребра?

536. Будет ли призма правильной, если в основании ее лежит квадрат?

537. Почему в прямой призме боковые ребра перпендикулярны диагоналям оснований?

538. Существует ли призма, у которой только одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания?

539. Доказать, что диагональ правильной четырехугольной призмы образует конгруэнтные углы со всеми боковыми гранями призмы.

540. В правильной четырехугольной призме диагональ равна 5 см, а диагональ боковой грани равна 4 см. Вычислить высоту призмы.

541. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной a и острым углом α . Меньшая диагональ этой призмы наклонена к плоскости основания под углом β . Найти длину этой диагонали.

542. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, один из углов которой равен 76° . Определить двугранные углы при боковых ребрах призмы.

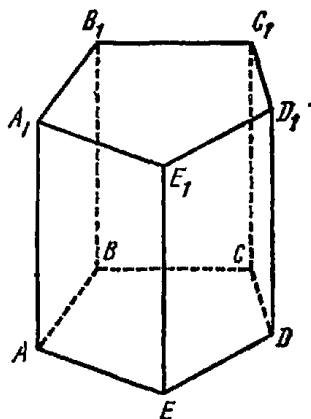


Рис. 61

Параллелепипед

543. 1. Какая призма называется параллелепипедом?

2. Какой параллелепипед называется прямым?

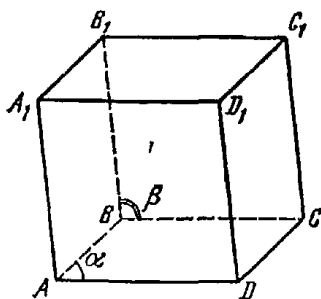


Рис. 62

3. Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным? Назвать примеры предметов, которые имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

4. Какую геометрическую форму имеют грани наклонного параллелепипеда (рис. 62); прямого параллелепипеда; прямоугольного параллелепипеда?

5. Каким свойством обладают а) противоположные грани параллелепипеда; б) середина диагонали параллелепипеда?

6. Чему равен квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда?

7. Сравнить длины всех диагоналей а) прямого параллелепипеда; а) прямоугольного параллелепипеда.

544. 1. Что называется кубом?

2. Чему равна диагональ куба, ребро которого a ?

3. Через диагональ основания куба проведена плоскость. Какие могут образоваться сечения куба этой плоскостью при вращении ее вокруг этой диагонали?

545. Площадь сечения, проведенного через диагонали двух противоположных граней куба, равна $36\sqrt{2}$ см. Вычислить ребро куба.

546. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна d . Найти расстояние точки пересечения его диагоналей от боковых ребер.

547. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 8 дм, длины двух сторон основания и диагональ параллелепипеда образуют арифметическую прогрессию с разностью 5 дм. Определить стороны основания и диагональ.

Площадь поверхности и объем призмы

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро, т. е.

$$S_{\text{бок}} = P_{\perp} l,$$

где $P_{\perp}$ — периметр многоугольника (рис. 63), плоскость которого перпендикулярна боковому ребру (любому), l — длина бокового ребра.

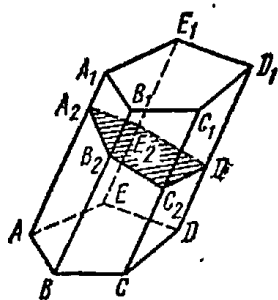


Рис. 63

У прямой призмы $P_{\perp}$ равен периметру основания ($P_{\perp} = P_{\text{осн}}$), а длина бокового ребра равна длине высоты ($l = H$). Площадь боковой поверхности прямой призмы

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H.$$

Объем всякой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е.

$$V = S_{\text{осн}} H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания.

548. 1. Что называется площадью поверхности многогранника? *

2. Что называется площадью боковой поверхности призмы?

3. Чему равна площадь поверхности призмы?

549. Почему формулы для вычисления поверхности и объема призмы верны для параллелепипеда?

* Раньше «площадь поверхности» называли «полной поверхностью».

550. Высота правильной призмы равна H . Сторона основания равна a . Найти площадь ее поверхности и объем, если число сторон основания равно 1) 3; 2) 4; 3) 6.

551. Диагональ d правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30° (рис. 64). Найти площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

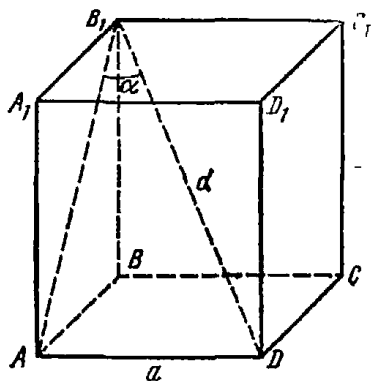


Рис. 64

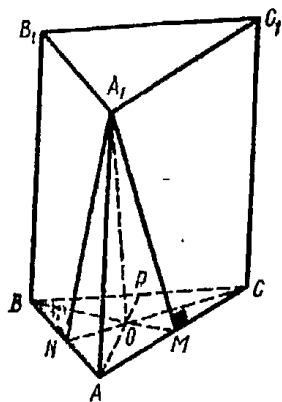


Рис. 65

552. В правильной четырехугольной призме площадь диагонального сечения равна F . Вычислить площадь боковой поверхности призмы.

553. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6 дм. Угол между плоскостью основания и плоскостью сечения A_1BC равен 45° . Найти площадь поверхности призмы.

554. 1. В основании наклонной призмы лежит равносторонний треугольник (рис. 65), сторона которого равна 10 дм, боковое ребро призмы равно 13 дм; одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Найти площадь боковой поверхности призмы.

2. В основании наклонной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной a , одно из боковых ребер b образует с прилежащими сторонами основания углы, равные α . Найти площадь боковой поверхности этой призмы.

555. Модель здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, выполнена в $1/20$ натуральной величины. Во сколько раз объем здания больше своей модели?

556. Из болванки, имеющей форму правильной четырехугольной призмы размером $10 \times 10 \times 80$ см³, прокаты-

вается лист толщиной в 1 мм. Вычислить площадь этого листа.

557. Из листа жести размером 70×140 см² вырезали по углам равные квадраты со стороной 10 см и, загнув

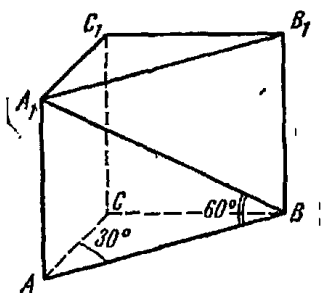


Рис. 66

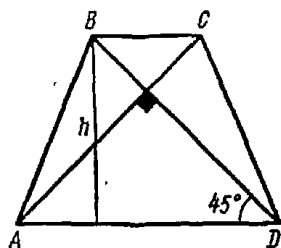


Рис. 67

края, получили коробку, открытую сверху. Вычислить объем этой коробки.

558. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно a . Один из углов основания равен 60° . Вычислить объем параллелепипеда.

559. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 30° (рис. 66). Высота призмы

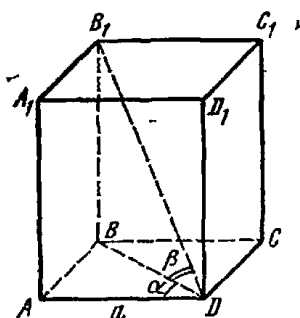


Рис. 68

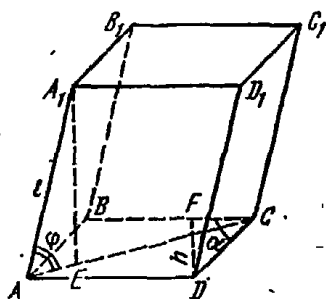


Рис. 69

равна 10 дм. Диагональ боковой грани, прилежащей к гипотенузе, образует с основанием угол, равный 60° . Вычислить объем.

560. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция (рис. 67), диагонали которой пересекаются под прямым углом и высота которой равна h . Диагонали призмы образуют с плоскостью основания угол 45° . Найти объем призмы.

561. Основанием призмы служит треугольник со сторонами 6, 10 и 14. Боковое ребро равно 8 см и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Определить объем.

562. Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна a , угол между этой стороной и диагональю основания равен α (рис. 68), диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β . Определить объем параллелепипеда.

563. Высота прямоугольного параллелепипеда равна h , а его диагональ составляет с основанием угол α , угол между диагоналями основания параллелепипеда равен β . Определить объем параллелепипеда.

564. В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб с углом α и высотой h (рис. 69). Боковое ребро l наклонено к плоскости основания под углом φ . Определить объем параллелепипеда.

Пирамида

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. На рис. 70 изображена четырехугольная пирамида $SABCD$.

565. 1. Какая пирамида называется тетраэдром?

2. Что называется диагональной плоскостью; диагональным сечением?

3. Сколько двугранных углов в четырехугольной пирамиде?

566. 1. Какая пирамида называется правильной?

2. Что называется апофемой правильной пирамиды?

3. Могут ли все боковые грани правильной шестиугольной пирамиды быть равносторонними треугольниками?

4. В правильной треугольной пирамиде построить угол наклона бокового ребра к плоскости основания и угол наклона боковой грани к этой плоскости. Какой из этих углов больше? Ответить на тот же вопрос для правильной четырехугольной пирамиды.

5. Построить угол между двумя смежными боковыми гранями правильной треугольной пирамиды; правильной четырехугольной пирамиды.

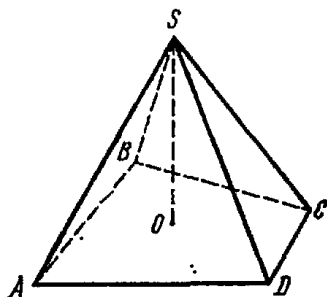


Рис. 70

567. Боковые ребра пирамиды конгруэнтны: 1) через какую точку основания проходит высота этой пирамиды; 2) какой четырехугольник может быть ее основанием?

568. Боковые грани пирамиды (рис. 71) наклонены под конгруэнтными углами к плоскости основания: 1) через какую точку основания проходит высота этой пирамиды? 2) какой четырехугольник может быть ее основанием?

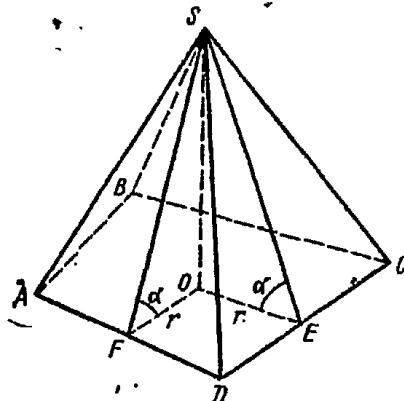


Рис. 71

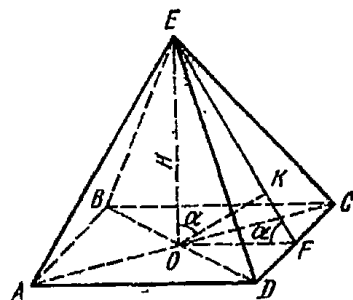


Рис. 72

569. Боковые грани четырехугольной пирамиды конгруэнтны. Какой четырехугольник может быть ее основанием?

570. Основанием пирамиды служит треугольник. Боковые ребра пирамиды образуют конгруэнтные углы с основанием. Определить вид треугольника, находящегося в основании, если высота пирамиды проходит через точку, лежащую 1) внутри этого треугольника; 2) вне его; 3) на стороне треугольника.

571. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Определить величину угла наклона бокового ребра к плоскости основания.

572. В правильной четырехугольной пирамиде (рис. 72) расстояние от центра основания до боковой грани 12 см. Боковая грань образует с основанием угол, равный 30° . Определить сторону основания.

Площадь поверхности и объем пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра ее основания на апофему, или

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} k,$$

где k — апофема, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту, или

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

573. 1. Как вычислить площадь боковой поверхности неправильной пирамиды?

2. Чему равна площадь поверхности пирамиды?

574. 1. Если в пирамиде все боковые грани наклонены под одним и тем же углом α к плоскости основания, то

$$S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos \alpha} \quad (S — \text{площадь основания}). \text{ Доказать.}$$

2. Во сколько раз площадь боковой поверхности пирамиды больше площади ее основания, если все двугранные углы при основании равны 60° ?

575. Найти площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 17 см, а сторона основания 16 см.

576. Крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием $4 \times 4 \text{ м}^2$ и углом наклона к чердаку, равным 45° . Сколько листов жести размером $70 \times 140 \text{ см}^2$ нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% от площади крыши?

577. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна h , а двугранный угол при основании равен 60° ?

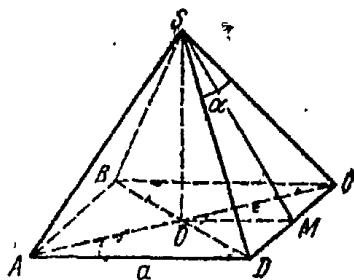


Рис. 73

578. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если расстояние от центра ее основания до боковой грани равно d , а боковая грань составляет с плоскостью основания угол α .

579. В правильной четырехугольной пирамиде (рис. 73) апофема вдвое больше стороны основания. Боковое ребро пирамиды равно 4 см. Вычислить площадь боковой поверхности.

580. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Найти угол наклона боковой грани к основанию пирамиды.

581. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и каждое из них равно a . Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

582. В правильной треугольной пирамиде через середину двух сторон основания и вершину пирамиды проведено сечение, стороны которого равны b , b и a . Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

583. Наибольшее диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды (рис. 74) представляет собой

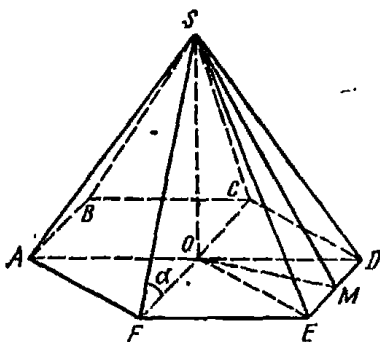


Рис. 74

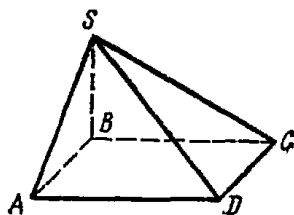


Рис. 75

равносторонний треугольник, сторона которого равна a . Определить объем пирамиды.

584. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем пирамиды.

✓ 585. Основание пирамиды — квадрат со стороной 12 см (рис. 75). Высота пирамиды равна 9 см и проходит через вершину основания. Вычислить площадь поверхности пирамиды.

586. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны a , b и c . Найти объем пирамиды.

587. 1. Какую часть объема прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ составляет объем треугольной пирамиды $B_1 ABC$?

2. Куб, ребро которого равно a , пересечен плоскостью, проходящей через середину трех его ребер, выходящих из одной вершины. Определить объем отсеченной пирамиды.

588. 1. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. Во сколько раз объем отсеченной пирамиды меньше объема данной пирамиды?

2. Как изменится объем пирамиды, если каждую сторону основания увеличить в три раза, а высоту ее уменьшить в три раза?

589. Определить объем пирамиды, у которой два боковых ребра равны 18 и 12 см и угол между ними равен 30° ,

а третье боковое ребро перпендикулярно данным ребрам и равно 15 см.

590. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α . Каждое боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом φ . Определить объем пирамиды.

Усеченная пирамида

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. На рис. 76 изображена усеченная пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

591. 1. Почему основания усеченной пирамиды — гомотетичные многоугольники?

2. Почему боковые грани усеченной пирамиды — трапеции?

3. Почему боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции?

4. Назвать предметы, которые имеют форму усеченной пирамиды.

5. Правильная усеченная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и точку, взятую на верхнем основании. Определить вид сечения.

6. Какие фигуры представляют собой диагональные сечения усеченной пирамиды?

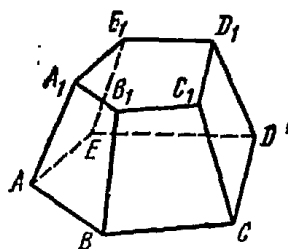


Рис. 76

Площадь поверхности усеченной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} k,$$

где P_1 и P_2 — периметры оснований, а k — апофема усеченной пирамиды.

592. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 20 и 10 см, а боковая грань наклонена к основанию под углом 60° (рис. 77). Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

593. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b ($a > b$), а высота пирамиды равна среднему пропорциональному из сторон оснований. Определить площадь поверхности пирамиды.

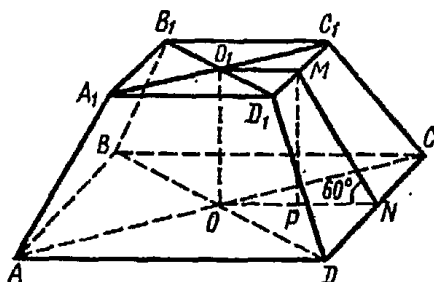


Рис. 77

594. Ребро куба равно a . Найти площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, отсекаемой от куба двумя плоскостями, одна из которых проходит через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, а другая — через середины тех же ребер.

ГЛАВА XXIII ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр

Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вкруг оси, содержащей его сторону. На рис. 78 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вкруг стороны CD .

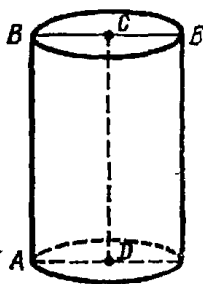


Рис. 78

595. 1. Где находится центр симметрии цилиндра?

2. Какая фигура является осевым сечением цилиндра?

3. Какой цилиндр называется равносторонним?

4. Какая плоскость называется касательной к цилиндру?

596. 1. Какая призма называется вписанной в цилиндр?

2. Всякую ли треугольную призму можно вписать в цилиндр?

3. Всякую ли прямую четырехугольную призму можно вписать в цилиндр?

4. Какая призма называется описанной около цилиндра?
 597. Диаметр вертикального ствола шахты равен 5 м. Можно ли в нем установить клеть шахтоподъемника, поперечным сечением которого является квадрат со стороной 3,7 м?

Площадь боковой поверхности и объем цилиндра

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту, т. е.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R H.$$

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т. е.

$$V = \pi R^2 H.$$

598. 1. Какой вид имеет развертка боковой поверхности цилиндра?

2. Во сколько раз площадь боковой поверхности цилиндра больше площади его осевого сечения?

599. Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в куб с ребром a .

600. Две детали, имеющие форму цилиндра, покрываются краской. Высота первой детали в два раза больше высоты второй детали, но радиус ее основания в два раза меньше радиуса основания второй детали. На какую из деталей расходуется больше краски?

601. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед (рис. 79). Найти отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади диагонального сечения параллелепипеда.

602. Выразить объем цилиндра через его диаметр основания D и высоту H .

603. Имеются два цилиндрических стержня. Первый из них в два раза толще, но вдвое короче второго. Какой стержень имеет больший объем?

604. Квадрат, площадь которого Q , вращается вокруг стороны. Вычислить 1) площадь осевого сечения цилиндра; 2) площадь боковой поверхности цилиндра; 3) объем цилиндра.

605. Из стальной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размером $1 \text{ м} \times 20 \text{ см} \times 20 \text{ см}$, изготавливается протягиванием проволоки диаметром 2 мм.

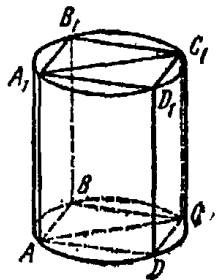


Рис. 79

Определить длину проволоки, полученной из данной болванки.

606. Определить площадь боковой поверхности и объем цилиндра, зная, что диагональ d осевого сечения цилиндра составляет с основанием угол α .

Конус

Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. На рис. 80 изображен конус $МAB$, полученный вращением прямоугольного треугольника AMO вокруг катета MO .

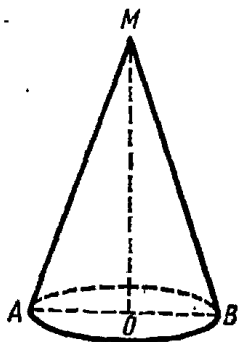


Рис. 80

607. Какое геометрическое тело образуется от вращения 1) прямоугольного треугольника около его гипотенузы; 2) равнобедренного треугольника около его основания?

608. 1. Какая фигура является осевым сечением конуса?

2. Какой конус называется равносторонним?

609. 1. Какая пирамида называется вписанной в конус; описанной около конуса?

2. Всякую ли треугольную пирамиду можно вписать в конус?

Площадь боковой поверхности и объем конуса

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl,$$

где R — радиус основания, а l — образующая.

Объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту, т. е.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания, H — высота.

610. Какой вид имеет развертка боковой поверхности конуса?

611. 1. Радиус основания конуса R , его образующая l . Доказать, что центральный угол развертки боковой поверхности конуса $\alpha = 360^\circ R/l$.

2. Вычислить центральный угол в развертке боковой поверхности равностороннего конуса.

612. Боковая поверхность конуса равна 40 дм^2 . Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. На какие части разделилась площадь боковой поверхности конуса этой плоскостью?

613. Найти отношение площади поверхности равносностонного конуса к площади его боковой поверхности.

614. Вычислить полную поверхность тела, полученного от вращения около меньшего катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 14 см , а один из катетов равен 10 см .

615. 1. Диаметр основания конуса увеличен в два раза. Во сколько раз нужно уменьшить высоту, чтобы объем не изменился?

2. Высота конуса уменьшена в два раза. Во сколько раз надо увеличить радиус основания, чтобы объем его не изменился?

616. Прямоугольный треугольник с катетом, равным a , и прилежащим углом 60° вращается вокруг гипотенузы. Найти объем тела вращения.

617. Образующая конуса l составляет с основанием угол α . Определить площадь поверхности и объем конуса.

618. Равнобедренный тупоугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b , а угол при основании равен α , вращается вокруг данной стороны. Найти объем и поверхность тела вращения.

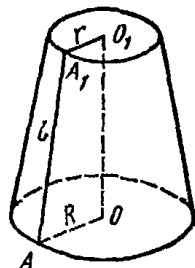


Рис. 81

Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, параллельным основанию.

Усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции AA_1O_1O (рис. 81) вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основанию.

619. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r , образующая составляет с плоскостью основания угол в 45° . Найти площадь осевого сечения.

620. Образующая l усеченного конуса составляет с плоскостью основания угол α , радиус меньшего основания равен $l/2$. Найти площадь осевого сечения.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований на образующую, или

$$S_{\text{бок}} = \pi (R + r) l,$$

где R — радиус нижнего основания, r — радиус верхнего основания, l — длина образующей.

621. Как вычислить площадь боковой поверхности усеченного конуса, если известны $R_{\text{ср}}$ — радиус сечения, проведенного через середину высоты (среднего сечения), и l — образующая усеченного конуса?

622. В прямоугольной трапеции боковая сторона l образует с основанием угол, равный 45° . Меньшее основание трапеции равно a . Найти площадь боковой поверхности тела, образованного вращением этой трапеции вокруг меньшей из боковых сторон.

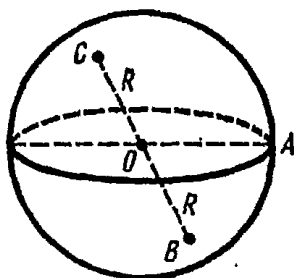


Рис. 82

623. Ромб, сторона которого a и острый угол 60° , вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через вершину острого угла и перпендикулярной к стороне. Найти поверхность тела вращения.

624. Диагональ осевого сечения усеченного конуса, равная d , составляет с плоскостью основания угол α и перпендикулярна образующей этого осевого сечения. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Сфера и шар

Сферой (O, R) называется множество всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние $R > 0$ (рис. 82).

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

625. 1. Дать определение сферы как поверхности вращения.

2. Дать определение шара а) как тела вращения; б) как множества точек.

3. Какая фигура получается от пересечения шара и плоскости?

4. Дать определение касательной плоскости к сфере (шару).

5. Сформулировать прямую и обратную теоремы о касательной плоскости к сфере.

626. Написать уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R и составить уравнение сферы с центром в начале координат, проходящей через точку A (2; 1; -3).

627. Точка A расположена на плоскости, касательной к сфере радиуса R . Прямая, соединяющая точку A с центром шара, наклонена к касательной плоскости под углом 60° . Найти расстояния точки A от точки касания и от центра шара.

628. Вершины прямоугольного треугольника лежат на сфере. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его гипотенуза равна a , а радиус сферы R .

Площадь сферы и объем шара

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

629. 1. Выразить площадь сферы и объем шара через диаметр D .

2. Объем шара вычислить по приближенной формуле $V = \frac{1}{2} d^3$. С недостатком или с избытком получится результат?

630. Чему равна полная поверхность полусферы радиуса R ?

631. На окраску шара диаметром 1,5 дм расходуется 50 г краски. Сколько краски требуется для окраски шара диаметром 3 дм?

632. Диаметр одного шара в три раза больше диаметра другого. Как относятся 1) площади поверхностей этих шаров; 2) их объемы?

633. Диаметр первого советского искусственного спутника Земли был равен 58 см, а второго американского — 16 см. Во сколько раз объем советского спутника превосходил объем американского?

634. Металлический равносторонний цилиндр, радиус основания которого $r = 2$ см, переплавлен в шар. Вычислить радиус шара. Потерями металла при переплавке пренебречь.

635. Площадь поверхности куба равна площади поверхности шара (сферы). Какой объем больше — куба или шара?

Вписанный и описанный шар

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все вершины многогранника принадлежат поверхности сферы; в этом случае шар называется *описанным около многогранника*.

Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр круга, описанного около основания.

Центр шара, описанного около пирамиды, все боковые ребра которой равны между собой, лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) с перпендикуляром, восстановленным из середины бокового ребра, лежащего в плоскости бокового ребра и высоты.

Многогранник называется *описанным около шара*, если все грани многогранника касаются сферы; в этом случае шар называют *вписанным в многогранник*.

Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит в середине высоты призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание.

Центр шара, вписанного в пирамиду, у которой боковые грани одинаково наклонены к основанию, лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла при основании пирамиды.

Шар называется *описанным около цилиндра*, если окружности оснований цилиндра принадлежат сфере.

Шар называется *вписанным в цилиндр*, если он касается его оснований и каждой образующей цилиндра.

Аналогично принимаются определения для вписанного и описанного конусов, усеченного конуса.

Центр шара, вписанного в цилиндр и описанного около него, находят так же, как и центр шара, вписанного и описанного около прямой призмы.

Центр шара, вписанного в конус и описанного около него, находят таким же образом, как центр шара, вписанного и описанного в пирамиду, считая образующую боковым ребром, а линейный угол при основании — углом наклона образующей к основанию.

636. Чему равен радиус шара, вписанного в куб, ребро которого a ; описанного около этого куба?

637. В куб вписан шар. Вычислить процентное отношение объема шара к объему куба.

638. Измерения прямоугольного параллелепипеда 2, 3 и 6 см. Найти радиус описанного шара.

639. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. В призму вписан шар. Найти объем призмы.

640. В цилиндр вписан шар радиуса r . Найти объем цилиндра.

641. В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания равен r , а высота, равна $4r$. Определить площадь поверхности шара.

642. В равносторонний конус, образующая которого равна l , вписан шар. Определить объем шара.

643. В конус вписан шар радиуса r . Определить площадь поверхности конуса, если угол между образующей и основанием конуса равен α .

644. Определить площадь поверхности шара, описанного около равностороннего конуса, радиус основания которого равен r .

645. Определить площадь поверхности шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна 24 см, а сторона основания 14 см.

646. Определить поверхность и объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, если сторона ее основания равна a и боковая грань составляет с плоскостью основания угол α .

ГЛАВА XXIV

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Билет 1

1. Сформулировать признаки параллельности прямых. Доказать один из признаков по выбору.

2. Логарифм степени.

3. Вычислить без таблиц $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$.

4. Найти 10% от

$$0,24 : \left[(4,5 - 1,8) \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{6} + 1,2 \right] - 0,01.$$

Билет 2

1. Сформулировать и доказать следующие теоремы:
а) о сумме величин внутренних углов треугольника;
б) о сумме величин внутренних углов выпуклого многоугольника.

2. Свойства графиков взаимно обратных функций.

3. Вычислить

$$\begin{aligned} &\cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 180^\circ + \cos 240^\circ + \\ &+ \cos 300^\circ + \cos 360^\circ + \cos 420^\circ. \end{aligned}$$

4. Построить график функции $y = 2^{\log_2 x}$.

Билет 3

1. Вывести формулы площадей параллелограмма и треугольника.

2. Логарифм произведения и частного.
3. Решить уравнение $\sin^2(270^\circ - x) + 2 \cos(360^\circ - x) = 3$.

4. Упростить $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} : x^{11/16}$.

Билет 4

1. Вывести формулу площади трапеции.
2. Определение логарифма. Тождество $a^{\log_a b} = b$.
3. Упростить $3 \operatorname{tg} 930^\circ + \sin 1200^\circ - \cos 1410^\circ$.
4. Упростить и найти числовое значение алгебраического выражения $\frac{1+a}{1+\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$ при $a=0,75$.

Билет 5

1. Сформулировать признаки подобия треугольников. Доказать один из признаков по выбору.
2. Арифметическая прогрессия (определение). Вывести формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.
3. Упростить $\frac{3 \sin 120^\circ - 5 \cos 150^\circ}{\operatorname{ctg} 210^\circ - 3 \operatorname{tg} 300^\circ}$.
4. Найти область определения функции $y = \lg(1 - \sqrt{x})$.

Билет 6

1. Площадь правильного многоугольника (вывести формулу).
2. Логарифмическая функция, ее график и свойства.
3. Упростить $\sin^2 \alpha + \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2$.
4. Вычислить $0,125^{-1}(-3,5)^0 + \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2} + 3 \cdot 8^{-2/3}$.

Билет 7

1. Сформулировать и доказать теорему о средней линии треугольника.
2. Геометрическая прогрессия (определение). Вывести формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии.

3. Вычислить $2 \cos \left[2 \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right]$.

4. Вычислить $\frac{1,37^2 + 2,74 \cdot 3,63 + 3,63^2}{0,874 \cdot 0,729 + 0,271 \cdot 0,874 + 0,126}$.

Билет 8

1. Сформулировать и доказать теорему Пифагора.
2. Свойство графика а) четной функции; б) нечетной функции.
3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x (\sin x + \cos x) = 0$.
4. Построить график функции $y = |x| + 1$.

Билет 9

1. Сформулировать и доказать теорему о свойствах равнобедренного треугольника.
2. Сформулировать и доказать теорему синусов.
3. Решить уравнение $3 \left(2 + \lg \frac{1}{2} \right) - 2 \lg 5 = 3(\lg x + \lg 2)$.
4. Упростить $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

Билет 10

1. Прямая, перпендикулярная плоскости (определение). Сформулировать и доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3^{\cos x + 1}$.

4. Упростить и найти числовое значение алгебраического выражения $\frac{\left(\frac{3}{a^4} - \frac{3}{b^4} \right) \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} \right)}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$ при $a = \frac{1}{12}$, $b = 8 \frac{1}{3}$.

Билет 11

1. Сформулировать и доказать теорему о трех перпендикулярах.

2. Понятие о функции. Способы задания функции.

3. Найти $\sin \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

4. Вычислить $100^{1 + \lg \cos \frac{\pi}{3}}$.

Билет 12

1. Сформулировать и доказать признак параллельности прямой и плоскости.

2. Свойство суммы и произведения корней квадратного уравнения (теорема Виета).

3. Найти $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если $\sin \alpha = 0,5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Решить неравенство $\frac{2x - 3}{\sqrt{2} - \sin x} < 0$.

Билет 13

1. Перпендикулярные плоскости (определение). Сформулировать и доказать признак перпендикулярности двух плоскостей.

2. Линейная функция, ее график и свойства.

3. Доказать, что $\sqrt{2 + 2 \sin 15^\circ} = 2 \cos 15^\circ$.

4. Вычислить

$$\left[9^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{-2/3}\right] \left[9^{-0,25} - (2\sqrt{2})^{-2/3}\right].$$

Билет 14

1. Угол между прямой и плоскостью. Скрещивающиеся прямые. Угол между двумя скрещивающимися прямыми.

2. Геометрическая иллюстрация решения системы линейных уравнений с двумя переменными.

3. Упростить $\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha$.

4. Указать множество точек $(x; y)$ координатной плоскости, для которого $\lg x + \lg y = 1$.

Билет 15

1. Сформулировать и доказать теорему о площади боковой поверхности призмы.

2. Свойства числовых неравенств.

3. Упростить

$$\operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \sin(2\pi - x) \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right).$$

4. Упростить и найти числовое значение алгебраического выражения

$$\frac{(a-b)^{1/2} (a-b)^{1/3} (a-b)^{1/6}}{a^{1/2} + b^{1/2}} \text{ при } a=72,25; \quad b=12,25.$$

Билет 16

1. Сформулировать и доказать теорему о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда.

2. Доказать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.

3. Упростить
$$\frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \sin \alpha}.$$

4. Упростить и найти числовое значение алгебраического выражения
$$\frac{a-b}{a^{1/2} - b^{1/2}} - \frac{a^{3/2} - b^{3/2}}{a-b} \text{ при } a=\frac{1}{4}, \quad b=\frac{1}{9}.$$

Билет 17

1. Сформулировать и доказать теоремы о площади боковой поверхности пирамиды.

2. Графики функций $y=ax^2$, $y=ax^2+bx+c$ и их свойства.

3. Решить уравнение $(\sqrt{3})^{\cos x} = 1.$

4. Вычислить $5 \log_2 \log_2 16 + \log_2 \frac{1}{2}.$

Билет 18

1. Сформулировать и доказать теорему косинусов.

2. Показательная функция, ее график и свойства.

3. Упростить $8 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha.$

4. Найти x , если $7,4 : \left(5 - 3,2 : \frac{0,8 - 0,1x}{0,5}\right) - 7,15 = \frac{1}{4}.$

Билет 19

1. Сформулировать и доказать теорему об объеме призмы.
2. Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$.

3. Упростить
$$\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

4. Вычислить
$$\sqrt{\frac{10 \sqrt{55^2 - 45^2}}{0,25 \sqrt{10}}}.$$

Билет 20

1. Сформулировать и доказать теорему об объеме пирамиды.

2. Синус угла. Синус числового аргумента. Доказать тождество $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

3. Решить неравенство $\frac{5x-4}{2x-3} > 2$.

4. Из точки, взятой на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной в 1,6 и 3 дм. Найти радиус окружности и ее длину.

Билет 21

1. Сформулировать и доказать теорему о площади боковой поверхности усеченной пирамиды.

2. Свойства и график функции $y = \sin x$.

3. Решить неравенство $\frac{\log_{0,3} 3}{0,5x-1} > 0$.

4. Вычислить
$$\frac{9 \cdot 3^{-2} + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{(-3)^0 + (-0,5)^0 \left(\frac{1}{81}\right)^{-1/2}}.$$

Билет 22

1. Сформулировать и доказать теорему об объеме цилиндра.

2. Косинус угла. Косинус числового аргумента. Доказать тождество $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
3. Решить уравнение $2^{\lg x - 1} = 0,5^{-1}$.
4. Построить график функции

$$y = \sin^2 \sqrt{x+2} + \cos^2 \sqrt{x+2}.$$

Билет 23

1. Сформулировать и доказать теорему об объеме конуса.
2. Свойства и график функции $y = \cos x$.
3. Решить неравенство $(x^2 + 1) \log_{0,5} x > 0$.
4. Решить уравнение $2^{\sin x} - \sqrt{3} \cos x = 1$.

Билет 24

1. Сформулировать и доказать теорему о площади сферы.
2. Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов.
3. Решить уравнение $2^{\lg x} 15^{\lg x} = 900$.
4. Построить график функции $y = |\cos x| / \cos x$.

Билет 25

1. Вписанный угол (определение). Сформулировать и доказать теорему о величине вписанного угла.
2. Формулы синуса, косинуса и тангенса двойного аргумента.
3. Решить неравенство $2^5 - 6x > 1/2$.
4. В конусе через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Найти отношение объема полученного усеченного конуса к объему отсеченного конуса.

Билет 26 *

1. Сформулировать и доказать теорему о центре симметрии параллелепипеда.
2. Формулы преобразования в произведения суммы и разности синусов двух аргументов.

* Некоторые вопросы билетов 26—40 доступны лишь учащимся, изучавшим математику по ныне действующей школьной программе.

3. Найти производную функций $f(x) = 2,5x^3 - 5x + 1$. Какой геометрический смысл производной в точке $x = 1$?
4. Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, решить неравенство $\cos x > 1/2$.

Билет 27

1. Сформулировать и доказать теорему Фалеса.
2. Формулы преобразования в произведения суммы и разности косинусов двух аргументов.
3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{-x} + \sqrt{x+2}.$$

4. Решить уравнение $\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x = 1$.

Билет 28

1. Сформулировать теоремы о признаках параллелограмма (доказать один из признаков).
2. Формулы косинуса и синуса суммы двух аргументов.
3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg x}$.
4. Построить график функции $y = |x|/x$.

Билет 29

1. Сфера и шар (определение). Вывести уравнение сферы с центром в начале координат.
2. Формула числа перестановок.
3. Доказать неравенство $\frac{a}{5} + \frac{5}{a} \geq 2$ ($a > 0$).
4. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = 1/2$.

Билет 30

1. Плоскость, касательная к сфере (определение). Сформулировать и доказать теорему о плоскости, касательной к сфере.
2. Формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ и функциями аргумента α .

3. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

4. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $(0; 1)$.

Билет 31

1. Доказать теорему о производной суммы двух функций.

2. Формула для вычисления площади проекции многоугольника на плоскость.

3. Начертить график функции $y = 10^{-\lg x}$.

4. Найти $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$. При каком условии $\sin \alpha$ положителен?

Билет 32

1. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график.

2. Формула Ньютона (натуральная степень бинома)

3. Дано $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.
Вычислить скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{c})$.

4. Решить неравенство $\log_2(x+12) < 1$.

Билет 33

1. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

2. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма).

3. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M , N и P — середины ребер AA_1 , BB_1 и AD . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

4. Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$.

Билет 34

1. Решение уравнения $\sin x = a$.

2. Параллелограмм (определение). Теорема о центре симметрии параллелограмма. Свойства параллелограмма.

3. Решить неравенство $|3x-2| \leq 1$.

4. Дана функция $f(x) = \sin x$. Найти, первообразную, график которой проходит через точку $(\pi/3; 1)$.

Билет 35

1. Решение уравнения $\cos x = a$.

2. Прямоугольник (определение). Теорема об оси симметрии прямоугольника.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделав чертеж) $y = 2x^2$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

4. Доказать справедливость равенства $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 1$.

Билет 36

1. Теорема о сумме величин противоположных углов вписанного четырехугольника.

2. Формула числа размещений.

3. Построить график функции $y = e^{\ln(x^2 + 1)}$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - \sin^2 2x = \cos^2 2x$.

Билет 37

1. Теорема о сумме длин противоположных сторон описанного четырехугольника.

2. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале.

3. С помощью теорем о пределах найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5}{5n^2 + 3n + 8}$.

4. Решить уравнение $f'(x) = \varphi'(x)$, если $f(x) = 2x$, $\varphi(x) = 4 \sin x$.

Билет 38

1. Сформулировать и доказать теорему о признаке параллельности плоскостей.

2. Формула числа сочетаний.

3. Решить неравенство $\log_{0,5}(2x+3) < \log_{0,5}(3x-4)$.

4. Найти площадь ромба, если его острый угол равен α , а радиус вписанного круга равен r .

Билет 39

1. Доказать теорему о производной произведения двух функций.

2. Скалярное произведение векторов (определение).
Основные свойства скалярного произведения.

3. Показать штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y > x^2. \end{cases}$$

4. Вычислить без таблиц $\frac{\sin 156^\circ \sin 114^\circ}{\operatorname{tg} 336^\circ} + \sin^2 246^\circ$.

Билет 40

1. Вывести формулу производной синуса.
2. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.
3. Указать промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 + 1,5x^2 + 3$.
4. Найти $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 1$.

ГЛАВА XXV

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

1. Вычислить: 1) $375 \cdot 125 \cdot 64$; 2) $12 \cdot 12,5 \cdot 56$; 3) $217^2 - 216^2$; 4) $2,78 \cdot 361 + 361 \cdot 7,22 - 261 \cdot 5,64 - 261 \cdot 4,36$.

2. Указать какое-нибудь число, заключенное между числами 1) 1,4 и 1,5; 2) $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{8}$.

3. Найти: 1) 50% от 27; 2) 25% от 48; 3) 12,5% от 32; 4) 87,5% от 16; 5) 50% от 50%; 6) на некоторый товар были дважды снижены цены — сначала на 10%, затем еще на 20%. Какой общий процент снижения цены?

4. Вычислить: 1) $a^2 - 57a + 142$ при $a = 58$; 2) $2a^3b \times (3a + 7b)(0,4a - 0,8b)$ при $a = 2,5$; $b = 1,25$; 3) $\frac{a^3 + 0,125}{a^2 - 0,5a + 0,25}$ при $a = 9,5$; 4) $\sqrt{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$ при $a = 0,69$; $b = 0,31$.

5. Вычислить наиболее простым способом:

1) $1,28^3 - 1,28 \cdot 0,72^2 - 2,56 \cdot 0,56$;

2) $\sqrt{(27,8^3 + 8,2^3) : (27,8^2 - 27,8 \cdot 8,2 + 8,2^2)}$;

3) $(8,31^3 + 9,69^3) : 18 + 3 \cdot 8,31 \cdot 9,69$;

4) $\sqrt{72^3 + 54^3}$; 5) $\sqrt[2]{100} \cdot \sqrt[3]{0,05} \cdot \sqrt[3]{1,25} \cdot \sqrt[3]{160}$;

6) пользуясь правилом подсчета верных цифр, вычислить $S = ah$, если $a \approx 5,746$, $h \approx 0,024$.

6. Найти значения 1) $2^5 \cdot 5^6$; 2) $\frac{0,125^3 \cdot 8^4}{47 \cdot 0,25^7}$; 3) $2^{-1} + 2^{-1}$;
4) $2^{-1} + (-2)^{-1}$.

7. Что больше: 1) 18^4 или $15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21$; 2) 21^4 или $16 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 26$?

8. Разность между двузначным числом $\overline{ab}^*$ и суммой его цифр делится на 9. Доказать.

9. Разность между трехзначным числом $\overline{abc}$ и числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке $\overline{cba}$, делится на 99. Доказать.

10. Чему равно 1) $\sqrt{x^2}$, если $x < 0$; 2) $\sqrt{(a+3)^2}$, если $a < -3$; 3) $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2}$, если $3 < x < 5$.

11. Вынести множитель из-под знака корня:
1) $\sqrt{-49x^3}$; 2) $\sqrt{\frac{10}{a^3}}$.

12. Внести множитель под знак корня: 1) $y\sqrt{6}$, если $y < 0$; 2) $a\sqrt{7}$, если $a > 0$.

13. Сократить:

$$1) \frac{5}{\sqrt{5}}; 2) \frac{b^2 - 2}{\sqrt{2} - b}; 3) \frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{x^{1/4} + y^{1/4}}; 4) \frac{x^{1/6} - y^{1/6}}{x^{1/12} - y^{1/12}}.$$

14. Вычислить: 1) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$;
2) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

15. Решить уравнения:

$$1) \frac{x+1}{x+1} = 1; 2) \frac{\lg x}{\lg x} = 1; 3) \sqrt{y^2} = 2; 4) \sqrt{x^2} = -5;$$

$$5) \sqrt{(x+2)^2} = 5; 6) \sqrt{x^2} = x; 7) (x+1)\sqrt{x} = 0; 8) (x+2) \times \sqrt{x-1} = 0; 9) (x+3)(x-10)\sqrt{x} = 0; 10) x^2 + (x-2)^0 - 5 = 0.$$

16. Решить неравенства 1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 \geq 0$; 3) $x^2 < 0$;
4) $x^2 \leq 0$; 5) $x^2 > 9$; 6) $x^2 < 4$; 7) $(x-2)^2(x+1) > 0$;
8) $\frac{x-2}{\cos 2} > 0$; 9) $\frac{2x-1}{\lg 0,8} < 0$; 10) $\sqrt{-x} > x$; 11) $\sqrt{x} > x$;
12) $\ln x^2 < \ln(-2x)$; 13) $e^{-1/x} > 1$.

17. Найти значения x , при которых верны неравенства 1) $-2 \leq 5 - x \leq 8$; 2) $-10 < -2x - 3 \leq 7$.

* Запись $\overline{ab}$ означает: $10a + b$.

18. Подобрать формулу n -го члена конечной последовательности 1) 3; 6; 9; 12; 15; 18; 2) 3; 7; 11; 15; 19; 3) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{31}{32}$.

19. 1) Арифметическая прогрессия начинается так: a ; b ; ... Найдите следующие ее два члена;

2) геометрическая прогрессия начинается так: a ; b ; ... Найдите следующие ее два члена;

3) в арифметической прогрессии даны a_1 и a_3 . Найдите a_2 ;

4) тот же вопрос для геометрической прогрессии.

20. Дано $2^x = a$; найти: 1) 2^{x+1} ; 2) 2^{-x} ; 3) 2^{x-2} ; 4) 2^{3x} .

21. Вычислить 1) $3x^{4/5}x^{0.1}x^{1.1}$ при $x=12$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{27}}$.

22. При каких значениях x имеют смысл выражения

1) $\lg(-x)$; 2) $\lg(1-x)$; 3) $\lg x^2$; 4) $\frac{1}{\lg x}$; 5) $\lg \lg x$;

6) $\lg^2 x$; 7) $\frac{1}{\lg x - 1}$.

23. Вычислить: 1) $10^{\lg 8 + 1}$; 2) $10^{-\lg 2}$; 3) $100^{\lg 5 + 1}$.

24. Представить в виде степени числа 10: 1) 5; 2) 3,5;

3) 0,7.

25. Упростить: 1) $7^{\lg 7}$; 2) $x^{\lg x}$.

26. Какой знак имеет соотношение $\lg \sin \alpha$ (α — острый угол)?

27. Образуют ли арифметическую прогрессию числа $\lg 0,1$; $\lg 1$; $\lg 10$; $\lg 100$?

28. Что больше:

1) $3 \lg 2$ или $2 \lg 3$?

2) $\frac{1}{2}(1 + \lg 8)$ или $2 \lg 9 - 1$?

3) $\lg \sin \frac{\pi}{6}$ или $\frac{1}{2} \lg 16 - \frac{1}{2} \lg 65$?

29. Решить уравнения: 1) $\lg^2 x^2 = 1$; 2) $9^{\lg x} + x^2 = 18$;

3) $\log_x a = a$.

30. Что больше: $\sin \alpha$ или $\lg \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$)?

31. Дано: $\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 2$. Найти произведение $\lg \alpha \sec \alpha$.

32. Найти наибольшее и наименьшее значение функций: 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x \cos x$; 3) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

33. Возможно ли соотношение $\lg \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$?

34. Имеют ли смысл выражения: 1) $\lg \cos 0$; 2) $\lg \cos \pi$
 3) $\sqrt{\lg \sin \frac{\pi}{3}}$; 4) $\sqrt{\lg \operatorname{tg} 50^\circ}$.

35. Возможны ли равенства 1) $\cos (\cos x)=0$; 2) $\lg \sin \alpha = -\sin \alpha$.

36. Какой знак имеет число 1) $\log_{\pi/3} \sin 1$; 2) $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$;
 3) $\log_{\pi/6} \cos 1$; 4) $\cos (\sin x)$.

37. Вычислить 1) $\operatorname{tg} 21^\circ \operatorname{tg} 69^\circ$; 2) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;
 3) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$; 4) $\lg \operatorname{tg} 23^\circ + \lg \operatorname{ctg} 23^\circ$; 5) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \times$
 $\times \lg \operatorname{tg} 2^\circ \dots \lg \operatorname{tg} 45^\circ$.

38. Решить уравнения:

1) $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$; 2) $3 \sin x + \cos x = 4$; 3) $\operatorname{tg} x +$
 $+ \operatorname{ctg} x = -1,75$; 4) $\sin x - \cos^2 3x = \sin^2 3x$; 5) $\lg \sin (x +$
 $+ |x|) = 0$.

39. Найти области определения функций: 1) $y =$
 $= \sqrt{5x - x^2 + \operatorname{tg} x}$; 2) $y = \lg (16 - x^2) + \operatorname{ctg} x$; 3) $y =$
 $= \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} + \lg (25 - x^2)$.

40. Найти множество значений функций:

1) $y = \frac{x+2}{x-1}$; 2) $y = x^2 + x - 6$; 3) $y = \sin x + \cos x$; 4) $y =$
 $= (\sin x + \cos x)^2$.

41. Построить графики следующих функций:

1) $y = \sin^2 \sqrt{(x-2) + \cos^2 \sqrt{(x-2)}}$; 2) $y = 3^{\log_2 x}$;
 3) $y = 2^{\log_2 (x-1)}$; 4) $y = \frac{|x|}{x}$; 5) $y = |x|x$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;
 7) $y = \sqrt{\lg (\cos 2\pi x)}$; 8) $y = x^{1/\lg x}$; 9) $y = \ln (ex)$; 10) $y =$
 $= \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0 \\ x & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ 11) $y = \begin{cases} |x| & \text{при } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

42. Изобразить на координатной плоскости множество
 решений системы:

$$1) \begin{cases} y > x^2, \\ y \leq 1 - x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ 2x - y \geq 0. \end{cases}$$

43. Описать на геометрическом языке множества:

1) $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$; 2) $\{(x; y) \mid (x-3)(y+2) = 0\}$;
 3) $\{(x; y) \mid |x| \leq 2 \text{ и } |y| \leq 2\}$.

44. По данным графикам (рис. 83—87) найти анали-
 тические задания соответствующих функций, т. е. задать
 функции формулами.

45. Сократить дробь $\frac{n!+(n+1)!}{n!}$.

46. Решить уравнения: 1) $\frac{(x+1)!}{x!} = 10$; 2) $G_x^2 = 10$.

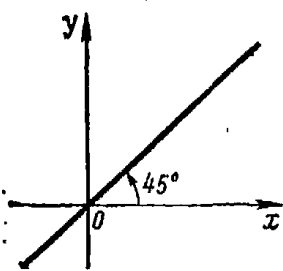


Рис. 83

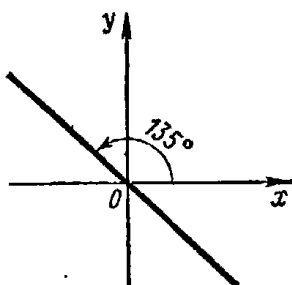


Рис. 84

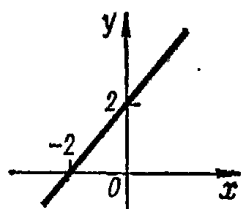


Рис. 85

47. Сколькими способами можно расставить четыре книги на полке?

48. В местке имеются четыре путевки, на которые претендуют семь человек. Сколько различных вариантов распределения путевок, если 1) все путевки в один дом отдыха; 2) в различные дома отдыха?

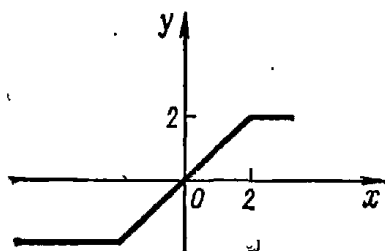


Рис. 86

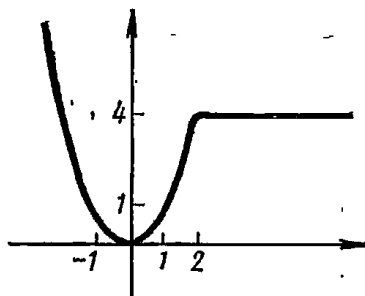


Рис. 87

49. Найти разложение степени бинома $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4$.

50. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$.

51. Найти производную функции 1) $e^x \sin x$; 2) $\frac{\ln x}{x}$.

52. Решить уравнение $f'(x) - g'(x) = 0$, если $f(x) = 2x+5$ и $g(x) = \sqrt{2} \sin x + x$.

53. Матерьяльная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$ (м). Найти 1) скорость в мо-

мент времени t (с); 2) в какой момент времени скорость будет равна 1 м/с ?

54. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции 1) $y=0,5x^2$ в точке с абсциссой $x=1$; 2) $y=\ln x$ в точке с абсциссой $x=\sqrt{3}$.

55. Написать уравнение касательной к графику функции $y=1/x$ в точке с абсциссой $x=1/2$.

56. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функции $y=6x-2x^2$.

57. Найти функцию $f(x)$, зная, что $f'(x)=3x^2+2x$ и что $f(2)=3$.

58. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y=3\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ и осью абсцисс.

59. В разностороннем треугольнике по крайней мере один из углов не больше 60° . Почему?

60. Может ли 1) диагональ ромба равняться его стороне; 2) высота ромба равняться его стороне?

61. Может ли 1) диагональ равнобедренной трапеции равняться его боковой стороне; 2) одна из диагоналей трапеции быть биссектрисой угла при меньшем основании; 3) одна из диагоналей трапеции быть биссектрисой угла при большем основании.

62. Почему в равнобедренной трапеции биссектрисы двух углов, прилежащих к боковой стороне, взаимно перпендикулярны?

63. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей этой трапеции?

64. В треугольнике проведена средняя линия. Найти отношение площади данного треугольника к площади отсеченного треугольника.

65. В трапеции проведены диагонали. Найти равновеликие треугольники.

66. Может ли площадь параллелограмма равняться произведению его основания на диагональ?

67. Верно ли утверждение: «две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны»?

68. В пространстве даны две точки. Всегда ли проекции этих точек на данную плоскость будут двумя различными точками?

69. В плоскости α дана прямая a . Сколько можно построить прямых, перпендикулярных прямой a и проходящих через точку, данную на этой прямой?

70. Если прямая параллельна плоскости, может ли

она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей на этой плоскости?

71. Существует ли правильная шестиугольная пирамида, у которой все боковые грани — правильные треугольники?

72. Существует ли пирамида, у которой все боковые ребра равны между собой, а основанием служит 1) прямоугольник; 2) ромб; 3) трапеция?

73. Боковые ребра пирамиды равны (одинаково наклонены к основанию). В какую точку плоскости основания проектируется ее вершина, если в основании 1) прямоугольный треугольник; 2) тупоугольный треугольник?

74. Существует ли пирамида, у которой все боковые грани наклонены под одним углом к основанию, а основанием служит 1) прямоугольник; 2) ромб; 3) трапеция?

75. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D_1 и точки M и N , являющиеся серединами ребер AB и BB_1 .

76. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти сумму векторов $\vec{D_1 C} + \vec{CD} + \vec{AA_1}$.

77. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна a . Вычислить скалярные произведения 1) $\vec{AA_1} \cdot \vec{AB_1}$; 2) $\vec{DD_1} \cdot \vec{BC}$; 3) $\vec{C_1 D} \cdot \vec{B_1 A}$.

78. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{B_1 B} = \vec{c}$, $[AC] \cap [BD] = M$. Разложить вектор $\vec{B_1 M}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

79. Какая фигура имеет большую площадь поверхности: сфера радиуса 1 дм или тетраэдр, каждое ребро которого равно 2,5 дм?

80. Как относятся объемы цилиндра и его модели, уменьшенной в пять раз?

81. Диаметр одного шара составляет половину радиуса другого. Как относятся объемы этих шаров?

Алгебра и начала анализа

1. 4) Окружность; 5) биссектриса этого угла. 3. 1) Множество корней уравнения $x^2 - 4 = 0$ есть $A = \{-2; 2\}$; 2) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 8) $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$; 4) $A = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right\}$. 4. $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{2}{3} \dots\right\}$. 5. 1) $A \supset B$; 2) $C \supset B \supset A$; 3) $A \supset B \supset C$; 4) $R \supset Z \supset N$. 6. 1) $[-\pi; 2]$; 2) $[-\sqrt{2}; 5]$; 3) множество всех квадратов. 7. 1) Первое неравенство определяет множество точек, лежащих на параболу $y < 4 - x^2$ и ниже ее, второе неравенство множество точек, лежащих на параболу $y = x^2$ и выше ее. Система задает пересечение этих множеств, на рис. 88 оно обозначено двойной штриховкой; 2) множество точек — область, ограниченная хордой и дугой окружности $x^2 + y^2 = 25$. 8. $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$; $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. 9. 1) Чтобы произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы обращался в ноль хотя бы один из сомножителей, т. е. $x^2 - 1 = 0$ или* $x^2 + 2x - 3 = 0$. Множество решений первого уравнения есть $A = \{-1; 1\}$, а второго $B = \{-3; 1\}$. Множество решений исходного уравнения состоит из всех чисел, входящих хотя бы в одно из множеств A или B . Таким образом, множество решений данного уравнения есть объединение множеств A и B : $A \cup B = \{-3; -1; 1\}$. Замечание. Было бы неверным сказать, что решение данного уравнения свелось к решению системы уравнений $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$ Ведь при решении системы мы ищем значения переменных, удовлетворяющие обоим уравнениям. (т. е. пересечение множеств), а мы находим значения переменной, удовлетворяющие

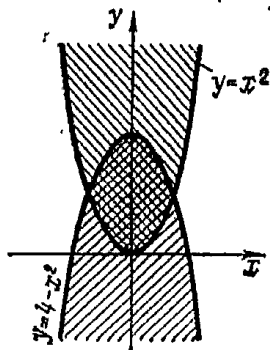


Рис. 88

множество решений данного уравнения есть объединение множеств A и B : $A \cup B = \{-3; -1; 1\}$. Замечание. Было бы неверным сказать, что решение данного уравнения свелось к решению системы уравнений $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$ Ведь при решении системы мы ищем значения переменных, удовлетворяющие обоим уравнениям. (т. е. пересечение множеств), а мы находим значения переменной, удовлетворяющие

* Здесь «или» понимается в неразделительном смысле, т. е. не исключается обращение в ноль обоих сомножителей

хотя бы одному из этих уравнений; в последнем случае говорят, что решается совокупность уравнений и это записывают с помощью квадратных скобок: $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0; \end{cases}$ 2) множество решений уравнения

$(x^2 - 1)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = 0$ можно найти, решив систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$ Это есть пересечение множеств $A = \{-1; 1\}$ и $B =$

$\{-3; 1\}$. Мы ищем числа, входящие в множества A и B одновременно. Решение последнего уравнения есть $A \cap B = \{1\}$, при $x=1$ как $x^2 - 1$, так и $x^2 + 2x - 3$ обращаются в ноль; 3) имеем совокупность уравнений $\begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0, \\ x^2 - 6x + 8 = 0, \end{cases}$ решение которой есть объединение мно-

жеств $\{2; 6\}$ и $\{2; 4\}$. Множество корней данного уравнения $\{2; 4; 6\}$. 4) $\{2\}$; 5) $\emptyset$; 6) $\{-5; -2; 2,5\}$. 10. 1) Необходимо (делимость на 6 — заключение, из него следует делимость на 3); 2) достаточно (делимость на 3 — заключение, оно следует из делимости на 6); 3) необходимо; 4) достаточно; 5) достаточно; 6) необходимо и достаточно. Необходимость: из того, что треугольник прямоугольный, следует, что квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора). Достаточности: если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник — прямоугольный. Эта теорема, обратная теореме Пифагора; она справедлива; 7) достаточно; 8) необходимо. 11. *Натуральный ряд чисел* — это множество всех целых положительных чисел: 1, 2, 3, ..., n , ..., расположенных в порядке их возрастания. Всякое целое положительное число, т. е. каждое число натурального ряда, называется *натуральным числом*. Множество всех натуральных чисел обозначается через N . 12. 1) Всякое натуральное число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым*, иными словами, это такое натуральное число, которое имеет только два различных натуральных делителя. Например, простые числа первого десятка, — это 2, 3, 5, 7. 2) Числа, не имеющие других общих натуральных делителей, кроме единицы, называются *взаимно простыми*. Например, 2 и 9; 1 и 6; 16 и 25. 13. Разложить число на простые множители — значит представить его в виде произведения простых чисел; например, $15 = 3 \cdot 5$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$. Разложение натурального числа на простые множители (большие единицы) всегда осуществимо и единственно. 14. *Наибольшим общим делителем* данных чисел называется самое большое число, на которое делится каждое из данных чисел. 15. Чтобы найти НОД нескольких чисел, нужно: 1) разложить эти числа на простые множители; 2) из каждого такого разложения выбрать общие множители и перемножить их между собой.

Например, найдем НОД чисел 63 и 84:

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{НОД}(63, 84) = 3 \cdot 7 = 21$$

Нахождение НОД связано с понятием пересечения множеств. Пусть A — множество натуральных делителей числа 63:

$$A = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\},$$

а B — множество натуральных делителей числа 84:

$$B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84\}.$$

Пересечение этих множеств (обозначается $A \cap B$) состоит из чисел 1; 3; 7; 21, или

$$A \cap B = \{1; 3; 7; 21\}.$$

Эти числа являются общими делителями для 63 и 84. Наибольшим элементом множества $A \cap B$ является 21 — это и есть НОД (63, 84).

16. Наименьшим общим кратным данных чисел называется самое меньшее число, которое делится на каждое из данных чисел. 17. Чтобы найти НОК нескольких чисел, надо: 1) разложить эти числа на простые множители; 2) взяв разложение одного из них, приписать к нему недостающие простые множители из разложений других чисел и перемножить все выписанные множители.

Например, найдем НОК чисел 45, 30, 25:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$25 = 5 \cdot 5$$

$$\text{НОК}(45, 30, 25) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 450$$

З а м е ч а н и е. Наименьшее общее кратное некоторых чисел удобно найти устно. Например, чтобы найти НОК (20, 24, 30), надо самое большее из данных чисел (30) умножить на 1, 2, 3, ... до тех пор, пока полученное произведение не разделится на остальные данные числа (20 и 24):

$$30 \cdot 1 = 30 \text{ — не делится на 24 и 20,}$$

$$30 \cdot 2 = 60 \text{ — не делится на 24,}$$

$$30 \cdot 3 = 90 \text{ — не делится на 24 и 20,}$$

$$30 \cdot 4 = 120 \text{ — делится на 24 и на 30.}$$

Следовательно, $\text{НОК}(20, 24, 30) = 120$. 18. 1. Положительные и отрицательные числа, как целые, так и дробные, и число ноль называются *рациональными*. Множество всех рациональных чисел обозначается через Q . Всякое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби p/q , $q \neq 0$, где числитель и знаменатель целые числа (положительные или отрицательные). Всякую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной или бесконечной периодической дроби. Конечную десятичную дробь можно превратить в бесконечную, если справа после последней значащей цифры приписать период ноль. Поэтому всякое рациональное число может быть изображено с помощью бесконечной *периодической дроби*. Например, $1/3 = 0,333 \dots$, $4/5 = 0,800 \dots$, $-2/15 = -0,1333 \dots$, $5 = 5,000 \dots$. Справедливо и обратное утверждение: всякая бесконечная периодическая дробь представляет собой рациональное число. **З а м е ч а н и е.** Бесконечные десятичные дроби коротко записывают так: $0,333 \dots = 0, (3)$ — чистая периодическая дробь, $0,7131313 \dots = 0,7 (13)$ — смешанная периодическая дробь. 2. *Иррациональными числами* называют все те числа, которые нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Они могут быть записаны в виде бесконечных *непериодических десятичных дробей*. Например, если сторона квадрата равна единице, то диагональ его равна $\sqrt{2} \approx 1,41421 \dots$. Иррациональными числами являются также отношение длины окружности к диаметру $\pi \approx 3,1415926 \dots$, десятичные логарифмы чисел, не являющиеся степенью десяти, например $\lg 2 \approx 0,3010 \dots$, значения тригонометрических функций бесконечного множества углов, например $\sin 40^\circ = 0,6428 \dots$, $\text{ctg } 28^\circ 30' = 1,842 \dots$. 19. 1) Рациональное при $a=0$, $a=1$ и $a=4$. При $a=3$ — иррациональное; 2) иррациональное при $a=\pi/4$ и $a=\pi/3$; 3) иррациональное при $a=2$ и $a=0,2$. 20. 1. Все рациональные и все иррациональные числа образуют вместе множество *действительных*,

или вещественных, чисел. Множество всех действительных чисел (числовая прямая) обозначается буквой R . 2. Всякое действительное число можно изобразить бесконечной десятичной дробью. Если эта дробь периодическая, то действительное число — рациональное, а если непериодическая — иррациональное. 21. 1) Множество целых положительных чисел; 2) множество дробных чисел; 3) множество иррациональных чисел. 22. Модулем (абсолютной величиной) неотрицательного числа называется само число; модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. В некоторых случаях удобно пользоваться другим определением модуля: модулем действительного числа $a \neq 0$ называется

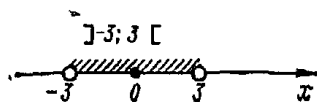


Рис. 89

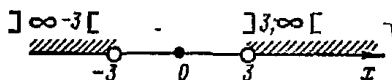


Рис. 90

большее из двух чисел a и $-a$. а) Нет; б) да. 23. 1) Геометрически модуль числа a есть расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует это число. Данному равенству удовлетворяют два числа: $a_1 = 5$ и $a_2 = -5$, которым на числовой прямой соответствуют две точки; 2) данному неравенству удовлетворяют все числа числовой прямой (рис. 89), расположенные в интервале $-3 < a < 3$ (заштрихованная часть числовой прямой), что можно обозначить так: $a \in]-3; 3[$; 3) данное неравенство выполняется при всех значениях a , расположенных справа от 3 и слева от -3 (рис. 90). 24. 1) $\sqrt{5}$; 2) 1; 3) $2 - \sqrt{3}$; 4) $2 - \sqrt{3}$; 5) $b - a$; 6) $\sqrt{2} - \sin x$, так как $|\sin x| < 1$, а $\sqrt{2} > 1$. 25. 1) Если $a \geq 0$, то $a + |a| = 2a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $a + |a| = 0$. 26. 1. Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a . Целую часть числа a обозначают $[a]$, например $[17,8] = 17$. 2. Дробной частью числа a называется разность между числом a и его целой частью. Дробную часть числа a обозначают $\{a\}$. По определению, $\{a\} = a - [a]$. 3. а) 1; б) 38; в) -7 . **З а м е ч а н и е.** Иногда ошибочно считают, что целой частью числа $-6,7$ является число -6 ; это неверно, так как $-6 > -6,7$, а наибольшим целым числом, не превосходящим $-6,7$, является -7 .

В таких случаях удобно число $-6,7$ записать так: $-6,7 = -6 - 0,7 = -7 + 0,3 = \overline{-7},3$; г) $-10,9 = -10 - 0,9 = \overline{-11},1$; $[\overline{-11},1] = -11$; д) $-0,8 = -1 + 1 - 0,8 = \overline{-1},2$; $[\overline{-1},2] = \overline{-1}$. **З а м е ч а н и е.** Такие записи чисел с отрицательными целыми частями применяют при вычислениях с помощью таблицы логарифмов. Целую часть числа называют его *характеристикой*, а дробную — его *мантиссой*. 4. б) 0, в) $\{\overline{3},4\} = 0,4$; г) $-\frac{5}{6} = -1 + 1 - \frac{5}{6} = -1 + \frac{1}{6}$; $\{-1 + \frac{1}{6}\} = \frac{1}{6}$.

27. Если первая отбрасываемая цифра пять или больше пяти, то к последнему разряду прибавляется единица (округление с избытком)

Если же первая отбрасываемая цифра меньше пяти, то последний оставляемый разряд не изменяется (округление с недостатком). Например, если 36,419 округлить до единиц, то получим $36,419 \approx 36$ (с недостатком); если 38456 округлить с точностью, не превосходящей 10, то получим $38456 \approx 38460$ (с избытком); $3,45 \approx 3,5$ округлили до десятых с избытком; $47,695 \approx 47,70$ округлили до сотых с избытком. 28. Погрешностью приближенного значения a числа x называется разность $x - a$. Эту разность обычно обозначают Δ («дельта»), т. е. $\Delta = x - a$. Если, например, число $x = 2,384$ заменить приближенным значением $a = 2,3$ с недостатком, то допускается погрешность $\Delta = x - a = 0,084$. Если приближенным значением числа x считать число $b = 2,4$ с избытком, то погрешность приближения $\Delta = x - b = 2,384 - 2,4 = -0,016$. 29. Относительной погрешностью приближенного значения a числа x называется отношение погрешности Δ этого приближения к числу a . Относительную погрешность обозначают ω («омега»), тогда $\omega = \Delta/a$. Относительную погрешность часто выражают в процентах. Показателем точности измерения является не погрешность, а относительная погрешность. Например при вычислении дроби $\frac{1}{3}$ заменяется значением 0,33. Вычислим относительную погрешность данного приближения:

$$\Delta = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}; \quad \omega = \frac{\Delta}{a} = \left(\frac{1}{300} : \frac{1}{3} \right) = 0,01 = 1\%.$$

30. 1. $x = 2,86 \pm 0,01$; $2,85 < x < 2,87$. Число 0,01 называется *границей погрешности* и обозначается буквой h . 2. $x = a \pm h$ или $a - h < x < a + h$.

31. 1,6 — один десятичный знак, две значащие цифры; 16 — ни одного десятичного знака, две значащие цифры; 0,16 — два десятичных знака, две значащие цифры; 0,016 — три десятичных знака, две значащие цифры; 0,106 — три десятичных знака, три значащие цифры; 1,060 — три десятичных знака, четыре значащие цифры.

32. Приближенные значения чисел записывают обычно так, чтобы в нем все значащие цифры были верны, т. е. чтобы погрешность не превосходила половины единицы оставляемого разряда. Например, запись $x \approx 8,6$ означает, что модуль погрешности не превышает 0,1. Запись $x \approx 8,63$ означает, что модуль погрешности не превышает 0,01. Запись $x \approx 8,630$ показывает, что модуль погрешности не превышает одной тысячной.

33. а) Граница погрешности $h = 0,1$; б) $h = 0,01$; в) $h = 0,001$; г) $h = 0,001$.

34. 1) Выделяем наименее точное слагаемое 1,2, имеющее наименьшее число верных десятичных знаков. Округляем второе и третье слагаемое до сотых (на один десятичный знак больше, чем в выделенном слагаемом): $12,243 \approx 12,24$; $0,3761 \approx 0,38$;

$1,2 + 12,24 + 0,38 = 13,82$. Полученный результат округляем до предпоследнего знака $13,82 \approx 13,8$;

2) $a \approx 101,65$; $c \approx 0,08$; $b + c \approx 8,78$; в промежуточном вычислении округления до десятых не производим;

$a - (b + c) \approx 92,87 \approx 92,9$;

3) $b \approx 1,39$; $ab \approx 3,6 \cdot 1,39 \approx 5,004 \approx 5,0$ (в результате сохраняем две значащие цифры, сколько их в числе 3,6);

$a : b = 3,6 : 1,39 \approx 2,59 \approx 2,6$;

4) $2,73^2 \approx 7,453 \approx 7,45$ (в ответе сохранены три значащие цифры); $64,7^2 \approx 4186 \approx 4190$; $347^2 \approx 120\,400 \approx 120 \cdot 10^3$;

5) $\sqrt{6,7} \approx 2,588 \approx 2,6$ (сохранены две значащие цифры); $\sqrt{8,59} \approx 2,931 \approx 2,93$; $\sqrt{12,87} \approx 3,588$; $\sqrt{84,60} \approx 9,198$ (сохранены четыре значащие цифры).

35. 1) *Одночленами* называются числа, переменные, обозначенные буквами, степени чисел и переменных и их произведения. Примеры $2\frac{1}{3}$, -3 , $-a$, 6^2 , $(-x)^2$, $2a^4b$, $-3(a^2)^2$.

2. *Многочленом* называется сумма одночленов. Например, $5x^4 - 3xy + 4xy - 0,5y^3 + 2$. 3. *Степенью одночлена*, содержащего несколько переменных (букв), называется сумма показателей степеней этих переменных. Например, одночлен $6a^2b^3$ имеет пятую степень, так как сумма показателей при переменных равна 5. Степень одночлена $2xy$ равна двум. Всякое число является одночленом. Степень такого одночлена считают равным нулю*. Например, число 3 можно представить так! $3a^0$ и $3x^0y^0$ — степень каждого этого одночлена равна нулю. *Степенью многочлена* называется степень старшего его члена. Например, степень многочлена $3x^4 - 2x^2 - 1$ равна четырём. 36. 1. Выражение вида $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$, где $a_0 \neq 0$ называется *многочленом* n -й степени от x ; числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — коэффициенты многочлена, причем a_0 — коэффициент при старшем члене, a_n — свободный член; 2. Те значения x , при которых многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ обращается в ноль, называются *корнями многочлена*, т. е. число a называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$. 37. 1) Для отыскания корней этого многочлена нужно решить уравнение $x^3 - 9x = 0$. Разложим многочлен на множители, тогда уравнение примет вид $x(x-3)(x+3) = 0$, откуда $x = 0$, или $x = 3$, или $x = -3$, а следовательно, и многочлен имеет эти корни; 2) $x^4 - 1 = 0$, $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$, множитель x^2+1 положительн при всех значениях x , уравнение, а следовательно, и многочлен $x^4 - 1$ имеют два корня: 1 и -1; 3) $5a^3 - 10a^2 + a - 2 = 0$, $5a^2(a-2) + (a-2) = 0$, $(a-2)(5a^2+1) = 0$, $5a^2+1 > 0$, откуда корень данного многочлена $a = 2$; 4) $a = -3$, $a = -2\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3}$. 38. 1. *Степенью числа a с показателем n ($n \in N$)* называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a , т. е. $a^n = \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ сомножителей}}$. При $n = 1$ это определение не имеет смысла, так как не существует произведения из одного сомножителя; в этом случае его надо дополнить так: $a^1 = a$. 2. В выражении a^n число a — основание степени, n — показатель степени, a^n — степень. 39. 1. При умножении степеней с равными основаниями показатели степеней складываются, а основание остается прежним. При делении степеней с равными основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним. 2. а) Чтобы возвысить в степень произведение, достаточно возвысить в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить: $(abc)^n = a^n b^n c^n$; б) $(a/b)^n = a^n/b^n$; в) $(a^m)^n = a^{mn}$. 40. 1) $2^{15} (1,25)^{13} (0,4)^{12} = (2 \cdot 1,25 \cdot 0,4)^{12} = 1^{12} = 1$; 2) $(2,16)^5 (1,08)^5 = (2,16 \cdot 1,08)^5 = 2^5 = 32$; 3) $(0,25)^7 \cdot 4 + (0,75)^4 (0,4)^4 \times 0,4 \left(3 \frac{1}{3}\right)^4 \left(3 \frac{1}{3}\right)^2 = (0,25 \cdot 4)^7 \cdot 4 + \left(0,75 \cdot 0,4 \cdot 3 \frac{1}{3}\right)^4 \cdot 0,4 \left(3 \frac{1}{3}\right)^2 = 1^7 \cdot 4 + 1^4 \cdot 0,4 \cdot 11 \frac{1}{9} = 8 \frac{4}{9}$. 41. 1) $5 \cdot 4^{2n-3} - 20 (2^n-3)^4 = 5 (2^3)^{2n-3} - 5 \cdot 2^3 \times \times 2^{4n-3} = 5 \cdot 2^{4n-6} - 5 \cdot 2^{4n-6} = 0$; 2) $2 \cdot 3^3 \cdot 3^{n-6} + 5 \cdot 3 \cdot 3^{n-4} = \frac{2n+13n+1}{2n^3} = 2 \cdot 3^{n-3} + 5 \cdot 3^{n-3} - 2 \cdot 3^{n-3} = 3^{n-3} (7 - 2 \cdot 3) = 3^{n-3}$. 42. 1. *Корнем n -й степени из числа a ($n \in N$; $n > 1$)* называется корень уравнения $x^n = a$, или, другими словами, корень n -й степени из числа a — это такое число, n -я степень которого равна a . 2. Если n — четное и $a > 0$ — два значения, например уравнение $x^2 = 25$ имеет два корня 5 и -5; если

* Исключение составляет число ноль. Этому одночлену не приписывается никакой степени.

n — четное и $a < 0$, действительных корней нет, например уравнение $x^4 = -16$ не имеет действительных корней. Если $x = 0$, корень равен нулю. Если n — нечетное, при любом a корень n -й степени из a имеет единственное значение, например уравнение $x^3 = 32$ имеет единственный корень 2, а уравнение $x^3 = -27$ имеет корень -3 . 43. 1. Если $a \geq 0$. 2. $\sqrt[n]{a} > 0$. 3. По определению арифметического корня n -й степени из числа a . Это равенство справедливо лишь при $a \geq 0$. 4. Нет. Равенство $\sqrt[n]{a^2} = a$ справедливо лишь для $a \geq 0$; если же $a < 0$, то $\sqrt[n]{a^2} = -a$. Пользуясь определением модуля, оба эти равенства можно объединить в одно такое: $\sqrt[n]{a^2} = |a|$. 5. Если $a > b$, то $\sqrt[n]{(a-b)^2} = a-b$; если $a < b$, то $\sqrt[n]{(a-b)^2} = b-a$, или короче: $\sqrt[n]{(a-b)^2} = |a-b|$; $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a-b$ при $a > b$ (при $a < b$ выражение не имеет смысла). 44. 1) $\sqrt[n]{(x-5)^3} - \sqrt[n]{(x+5)^3} = |x-5| - |x+5|$; если $x < -5$, то $x-5 < 0$, $x+5 < 0$ и данное выражение равно $-(x-5) - [-(x+5)] = 10$; 2) $-(4-a)+6-a=2$; 3) если $x > y$, то данное выражение равно $-(y-x)+(x-y)=2x-2y$; если $x < y$, то $(y-x) - (x-y) = 2y-2x$. 45. 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) это равенство справедливо, если $2x+6 > 0$, а также $1-x > 0$, т. е. $-3 < x < 1$; 4) $x < 2$; 5) $0,5 < a < 5$; 6) $a < -1$, $a > 1$. 46. 1) $\sqrt[4]{27 \cdot 48} = \sqrt[4]{3^3 \cdot 3 \cdot 2^4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 3 \cdot 2 = 6$; 2) применим тождество $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, записанное в обратном порядке, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; тогда $\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{57} \cdot \sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{57} = \sqrt[3]{11^3} - (\sqrt[3]{57})^2 = \sqrt[3]{121 - 57} = \sqrt[3]{64} = 4$; 3) 3; 4) указание. Обозначить 7,3 через a , 2,7 через b , тогда делимое и делитель равны $a-b$. 47. 1) $\sqrt[4]{16a^4b} = 2|a| \sqrt[4]{b} = -2a \sqrt[4]{b}$ (так как $a < 0$); 2) $-2g \times \sqrt[4]{3}$. 48. 1) $2 \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80}$; 2) $-2 \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = -\sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = -\sqrt[4]{2}$; 3) $-\sqrt[4]{2a^4}$; 4) $-\sqrt[4]{3x^4}$. 49. 1) $\sqrt[3]{x^3}$; 2) $\sqrt[4]{|x|^4}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2]{a}$; 4) $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3} \cdot 5} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[2]{5}$; 5) $\sqrt[3]{x \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[9]{x^4}$. 50. 1) Приведем эти корни к общему показателю: $\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{8}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[2]{9}$; так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, то $\sqrt[2]{9} > \sqrt[2]{8}$, поэтому $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{2}$; 2) $\sqrt[3]{2 \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[12]{2^8} > \sqrt[12]{2^6}$, поэтому $\sqrt[3]{2 \sqrt{2}} > \sqrt[3]{4}$. 51. 1) $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15 \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15 \sqrt{3}}{3} = 5 \sqrt{3} \approx 5 \cdot 1,732 \approx 8,66$; или $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} =$

$$= 5\sqrt{3} \approx 8,66; 2) \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} \text{ или } \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}; 3) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}; 4) \frac{4 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{(4 - \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} = \frac{(4 - \sqrt{3})^2}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16 - 8\sqrt{3} + 3}{16 - 3} = \frac{19 - 8\sqrt{3}}{13}; 5) \frac{5}{6}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}); 52. 1) 6.$$

Указание. Предварительно освободить знаменатели дробей от иррациональности; 2) 4; 3) $1/2$. Указание. Удобно временно обозна-

чить $\sqrt{a^2 - b^2}$ через x , тогда $\left(\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}\right) : \frac{8ax}{b^2} = \frac{b^2}{2(a^2 - x^2)}$; затем заменять x на $\sqrt{a^2 - b^2}$, тогда $\frac{b^2}{2[a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2]} = \frac{1}{2}$;

4) $\frac{\sqrt{x}}{2x(x-y)}$. Указание. Для упрощения удобно обозначить $\sqrt{x}$ через a , $\sqrt{y}$ через b , тогда $x = a^2$, $y = b^2$, $x\sqrt{x} = a^3$, $y\sqrt{y} = b^3$, $\sqrt{xy} = ab$; 5) $m/2$. Указание. Обозначить $\sqrt{m+2}$ через a и $\sqrt{m-2}$ через b ; 6) данное выражение равно $\frac{a}{2|a|}$, при $a < 0$ получаем $-1/2$, а при $a > 0$ оно равно $1/2$ 53. 1) Выражения 0° и $\frac{1}{0^0}$ не имеют смысла. 54. 1) $\frac{7^3 \cdot 49^{-2} \cdot 5^4 + 49 \cdot 125 (1/5)^{-1}}{(7 \cdot 5)^4 7^{-3}} =$

$$= \frac{7^6 (7^3)^{-2} \cdot 5^4 + 7^2 \cdot 5^3 \cdot 5}{7^4 \cdot 5^4 \cdot 7^{-3}} = \frac{7^4 \cdot 5^4 + 7^2 \cdot 5^4}{7 \cdot 5^4} = \frac{7^2 \cdot 5^4 (7^2 + 1)}{7 \cdot 5^4} = 7(7^2 + 1) = 350;$$

$$2) (2^3)^{3/2} + (3^3)^{2/3} - (17^2)^{1/2} = 8 + 9 - 17 = 0; 3) 40; 4) 11;$$

$$5) [(4/5)^{-2}]^{-2/3} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{64}{125}. 55. 1) \frac{x - 3a}{x}. \text{ Указание.}$$

Вынести за скобку в числителе x^{-4} , а в знаменателе x^{-3} ;

$$2) (0,5)^{0,5} (8x^2)^{0,5} = (0,5 \cdot 8x^2)^{0,5} = (4x^2)^{0,5} = 2x, \text{ если } x > 0, \text{ и } -2x, \text{ если } x < 0; 3) (3,2a^6)^{0,2} : (0,1a)^{0,2} = (3,2a^6 : 0,1a)^{0,2} = (32a^5)^{0,2} =$$

$$= (2^5 a^5)^{0,2} = 2a; 4) -1 \frac{3}{4}. \text{ Указание. } (2\sqrt{2})^{-2/3} = (2 \cdot 2^{1/2})^{-2/3} =$$

$$= (2^{3/2})^{-2/3} = 2^{-1}; (0,5)^{-0,5} = (2^{-1})^{-0,5} = 2^{0,5}. \text{ Затем применяется}$$

формула произведения суммы двух чисел на их разность; 5) $2\sqrt{b}$. Указание. Здесь удобно каждую дробь предварительно сократить, разложив $a - b$ на множители по формуле разности квадратов: $a - b = (a^{1/2})^2 - (b^{1/2})^2 = (a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2})$; 6) указание. Предварительно каждую дробь сократить, разложив $a - x$ на множители по формуле разности кубов: $a - x = (a^{1/3})^3 - (x^{1/3})^3 = (a^{1/3} -$

$\cdot x^{1/3} [(a^{1/3})^3 + a^{1/3} x^{1/3} + (x^{1/3})^3] = (a^{1/3} - x^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3})$; $a+x$ разложить на множители по формуле суммы кубов;
7) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; 8) 10; 9) 1. 56. 1) $(a-b)^{-1}$, при $a=4,5$ и $b=2,5$ будет $1/2$; 2) вынося за скобку степени с наименьшими показателями,

получим $\frac{a^{-2,5} b^{-0,6} (a^3 - b^3)}{a^{-2,5} b^{0,4} (a-b)} = \frac{a+b}{b}$, при $a=0,4$ и $b=0,8$ имеем $1,5$;

3) $\frac{x^{-2,5} y^{-0,5} (x^4 - 4y^3)}{x^{-2,5} y^{0,5} (x^2 - 2y)} = \frac{x^2 + 2y}{y}$; при $x=\sqrt{0,1}$, $y=0,04$ это вы-

ражение равно $4,5$; 4) $\left(\frac{a^{3/4} + a}{a^{1/4} + a^{1/3}} - a^{2/3} \right) : (1 - a^{1/12}) =$

$= \left[\frac{(a^{1/4})^3 + (a^{1/3})^3}{a^{1/4} + a^{1/3}} - a^{2/3} \right] : (1 - a^{1/12}) = (a^{1/2} - a^{7/12}) : (1 - a^{1/12}) =$

$= a^{1/2} (1 - a^{1/12}) : (1 - a^{1/12}) = a^{1/2}$; при $a=\sqrt{3}$, получим $\sqrt[4]{3}$.

57. 1. Два выражения называются *тождественно равными*, если все их соответственные значения равны. 2. *Тождество* — это равенство, в котором левая и правая части — тождественно равные выражения. Например, $(x-y)^2 = (y-x)^2$, $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, $\lg x = \frac{\sin x}{\cos x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} (2k+1) k \in \mathbb{Z} \right)$; $b = a^{\log_a b}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Верные

числовые равенства также называют тождествами. Например, $2^4 = 4^2$.

58. 1. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы на одном и том же числовом множестве и нужно найти, при каких значениях переменной x обе функции принимают одинаковые значения, то это записывается равенством $f(x) = \varphi(x)$, которое называется *уравнением*.

2. *Корнем уравнения* $f(x) = \varphi(x)$ называется то значение переменной $x=a$, при котором $f(a) = \varphi(a)$. 3. *Решить уравнение* — значит найти множество его корней.

59. Два уравнения называются *равносильными* (*эквивалентными*), если множества их корней совпадают. Например, уравнения $3x-1=5$ и $7x+2=16$ равносильны, так как оба они имеют единственный корень $x=2$. Уравнения $x^2-9=0$ и $x-3=0$ неравносильны, так как первое имеет два корня: $x=3$ и $x=-3$, а второе — один: $x=3$.

З а м е ч а н и е. Уравнения, которые не имеют корней, например $x+3=x-4$ и $3x-1=3x$, также считаются равносильными.

60. Первое свойство. Если к обеим частям уравнения $f(x) = \varphi(x)$ прибавить одно и то же число или одно и то же выражение $g(x)$, не теряющее смысла при всех допустимых значениях переменного, то новое уравнение $f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$ будет равносильно данному. Например, уравнение $3x-7=18-2x$ имеет корень $x=5$; если прибавить к обеим частям данного уравнения по $2x$, то $3x-7+2x=18-2x+2x$, или $5x-7=18$. Корень полученного уравнения $x=5$ остался прежним. Пользуясь этим свойством, можно любой член уравнения перенести из одной части уравнения в другую, переименовав его знак на противоположный. Второе свойство. Если обе части уравнения $f(x) = \varphi(x)$ умножить на одно и то же число, отличное от нуля, или на выражение $g(x)$, не теряющее смысла и не обращающееся в ноль при всех допустимых значениях переменного x , то новое уравнение $f(x)g(x) = \varphi(x)g(x)$ будет равносильно данному. Например, уравнение $-3x = -21$ имеет единственный

корень $x=7$. Если умножить обе части его на (-1) , то получится уравнение $3x=21$, имеющее тот же корень. З а м е ч а н и я: 1. Если обе части уравнения умножить на многочлен, содержащий неизвестное, то полученное уравнение может приобрести новые корни. Например, уравнение $x-5=0$ имеет единственный корень $x=5$. Если умножить обе части его на $x-1$, то полученное уравнение $(x-5) \times (x-1)=0$ имеет два корня — прежний $x=5$ и новый $x=1$. Приобретен корень $x=1$, который множитель обращает в ноль. 2. Если обе части уравнения разделить на многочлен, содержащий переменное, то полученное уравнение может потерять корни. Например, уравнение $(x+1)(x+3)=0$ имеет два корня: $x=-1$ и $x=-3$. Если разделить обе части уравнения на $x+3$, то получится уравнение $x+1=0$, единственный корень которого $x=-1$, а корень $x=-3$ потерян. Если обе части неполного квадратного уравнения $x^2+x=0$ разделить на x , то будет потерян корень $x=0$. 61. 1) Нет. Первое уравнение имеет один корень $x=2$, а второе два: $x=2$ и $x=3$; 2) нет. Первое уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=2$, а второе — один: $x=2$; 3) нет. Первое уравнение имеет корень $x=7$, а второе не имеет кор-

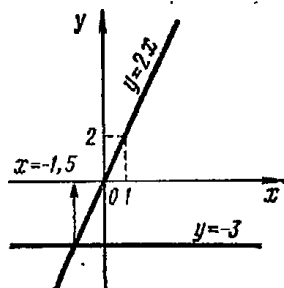


Рис. 91

пей, так как при $x=7$ дробь $1/(x-7)$ не имеет смысла. 62. 1) $\frac{1}{2x-1} -$

$$-\frac{5}{x} - \frac{3}{x(2x-1)} = 0, \quad \frac{x-5(2x-1)-3}{x(2x-1)} = 0; \text{ используя условие ра-}$$

венства дроби нулю, имеем $\begin{cases} 2-9x=0, \\ x(2x-1) \neq 0; \end{cases}$ отсюда $x=2/9$, высказы-

вание $\frac{2}{9} \left(2 \cdot \frac{2}{9} - 1 \right) \neq 0$ истинно. Ответ: $\{2/9\}$; 2) $\{8\}$. 63. 1) Если

$a \neq 0, b=0$; 2) если a и b имеют одинаковые знаки; 3) если a и b имеют разные знаки. 64. 1) При $a=0$, но $b \neq 0$ оно принимает вид $0x+b=0$, или $0x=-b$. Такое равенство не может выполняться ни при каких значениях x ; 2) при $a=0$ и $b=0$ получается равенство $0x+0=0$, оно справедливо при любых значениях x ; 3) при $a \neq 0$ оно имеет единственный корень. 65. 1) При $a=3$ данное уравнение принимает вид $0x=6$, т. е. не имеет корней. При $a=-3$ оно принимает вид $0x=0$ и имеет бесконечное множество корней (любое действительное число — корень уравнения). При $a \neq 3$ и $a \neq -3$ уравнение имеет единственный корень $x=1/(a-3)$; 2) это уравнение приводится к виду $(a^2-4)x=(a+2)(3a-5)$. При $a=2$ оно принимает вид $0x=4$, т. е. не имеет решения. При $a=-2$ уравнение имеет вид $0x=0$ — корнем его служит любое действительное число. При $a \neq 2$ и $a \neq -2$ уравнение имеет единственный корень $x=(3a-5)/(a-2)$. Это значит, что каждому $a \neq 2$ и $a \neq -2$ соответствует единственное значение x . Например, при $a=1$ $x=2$, при $a=0$ $x=2,5$ и т. д.; 3) при $a=3$ и $a=0$ уравнение теряет смысл (при этих значениях a знаменатели обращаются в ноль). При всех остальных значениях после преобразований

получим $\begin{cases} (a-4)x=a+3, \\ a(a-3) \neq 0. \end{cases}$ Если $a=4$, то уравнение корней не имеет.

Ответ: если $a \neq 4$, $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x = (a+3)/(a-4)$. 66. 1) $x = -1,5$ (рис. 91). Строим на одном чертеже графики функций: $y = 2x$ и $y = -3$, абсцисса точки пересечения этих графиков $x = -1,5$ — корень уравнения; 3) строим графики функций $y = 3x$ и $y = 0$ (ось Ox), которые пересекаются в начале координат, где $x = 0$; 4) корень $x = 1$ — абсцисса точки пересечения графиков функций $y = 2x - 2$ и $y = 1 - x$.

67. Системой двух линейных уравнений с двумя переменными x и y называется система вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ —

известные числа. 68. 1. Решением системы с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел, являющаяся решением каждого из уравнений, входящих в систему. Пусть множество A состоит из пар чисел, удовлетворяющих первому уравнению, а множество B — из пар чисел, удовлетворяющих второму уравнению. Решить систему — значит найти пересечение множеств решений первого и второго уравнений $(A \cap B)$. 2. Две системы уравнений называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Утверждение о равносильности двух уравнений записывается с помощью

знака равносильности — двойной стрелки $\Leftrightarrow$. 69. 1) $\begin{cases} 7x + 2y = 17 \\ x = 8 + 2,5y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(8 + 2,5y) + 2y = 17 \\ x = 8 + 2,5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56 + 17,5y + 2y = 17 \\ x = 8 + 2,5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19,5y = -39 \\ x = 8 + 2,5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 8 + 2,5y \end{cases} \Leftrightarrow (x = 3; y = -2); \quad 2) (-2; -3); \quad 3) \text{ если}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{ то } \begin{pmatrix} x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; & y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{pmatrix}.$$

70. Если $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, то система приводится к виду $\begin{cases} y = k_1x + b_1; \\ y = k_2x + b_2; \end{cases}$

если $k_1 \neq k_2$, то система имеет единственное решение, графики уравнений — прямые на плоскости пересекаются (рис. 92, а). Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то множество решений системы пусто, графики уравнений параллельны и не имеют общих точек (рис. 92, б). Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, система имеет бесконечное множество решений — графики

уравнений совпадают (рис. 92, в). 71. 1) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}; \end{cases}$ угловые

коэффициенты $k_1 = -1$; $k_2 = 2/3$ различны — прямые пересекаются, следовательно, система имеет одно решение;

$$2) \begin{cases} y = -\frac{2}{5}x + 1, \\ y = -\frac{3}{7,5}x + \frac{6}{7,5}; \end{cases} \text{ здесь } k_1 = -\frac{2}{5}; \quad k_2 = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}; \quad b = 1; \quad b_2 =$$

$-\frac{6}{7,5}$; угловые коэффициенты прямых равны, значит прямые парал-

лельны. Так как $b_1 \neq b_2$, то прямые не имеют общих точек. Множе-

ство решений системы пусто; 3) $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}; \end{cases}$ прямые совпадают.

Система имеет бесконечно много решений. 72. 1. $k_1 = -1/2$; $k_2 = -3/a$; $k_1 = k_2$, если $a=6$. 2. $m=7$, $n=12$. 3. $k_1 = -3$, $k_2 = -6/a$. Если $a \neq 2$, то система имеет единственное решение, если $a=2$ — система имеет бесконечно много решений. 4. При $k=1$ прямые совпадают — система имеет бесконечно много решений. При $k=-1$ графики уравнений

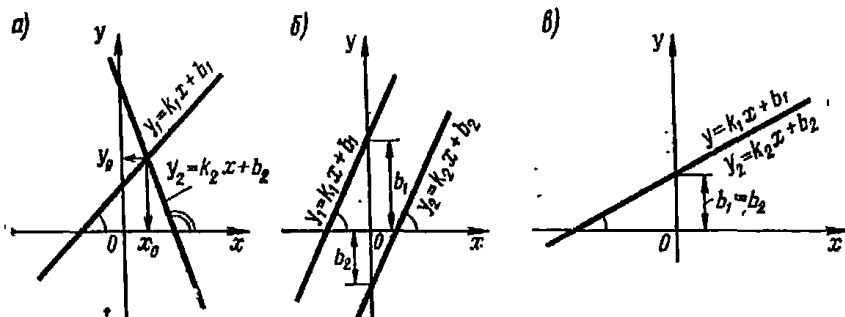


Рис. 92

параллельны и не имеют общих точек; множество решений системы пусто. 73. 1. *Неравенством* называются два алгебраических выражения, соединенные знаком «больше» ($>$) или «меньше» ($<$). Например, $-2 > -5$, $a^2 + 3 < a^2 + 7$, $x - 3 > 7$, $x + y > x$; первое и второе неравенства — тождественные, третье и четвертое справедливы лишь при некоторых значениях букв и называются неравенствами, содержащими переменные. Иногда неравенства при некоторых значениях входящих в них букв обращаются в равенство. В этом случае ставится двойной знак, объединяющий знак равенства и неравенства, например $(a - b)^2 \geq 0$, что читается так: $(a - b)^2$ больше или равно нулю, или $(a - b)^2$ не меньше нуля. Выражение $-a^2 < 0$ читается так: $-a^2$ меньше или равно нулю, или $-a^2$ не больше нуля. Такие выражения называются *нестрогими неравенствами*. Важно знать, что неравенство $(a - b)^2 > 0$ означает, что либо $a - b > 0$, либо $a - b = 0$. 2. Верны. Соотношение $3 > 0$ означает, что либо $3 > 0$, либо $3 = 0$, в данном случае справедлива первая возможность. Запись $5 > 5$ означает, что либо $5 > 5$, либо $5 = 5$. Справедлива вторая возможность. 3. Неравенство $a > b$ справедливо в том и только в том случае, если $a - b > 0$; $a < b$, если $a - b < 0$. 74. 1. Нет; только тогда, когда $c > 0$. 2. Нет; только тогда, когда a и b положительны. Если, например, $-3 > -5$, то $(-3)^2 < (-5)^2$.

3. а) $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$

75. 1) $0,4 < 0,1a < 0,5$; 2) умножив обе части неравенства на (-1) , получим $-4 > -a > -5$, или $-5 < -a < -4$; 3) прибавив к обеим частям предыдущего неравенства по 5, получим $0 < 5 - a < 1$; 4) $1/5 < 1/a < 1/4$ (по свойству числовых неравенств). 76. 1. Среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть число, равное

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, т. е. оно равно сумме данных чисел, разделенной на их количество.

В частном случае *среднее арифметическое двух данных чисел* a и b равно их полусумме, т. е. $(a+b)/2$. 2. *Среднее геометрическое положительных чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть арифметический корень степени n из произведения этих чисел, т. е. оно равно $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. *Среднее геометрическое* x *двух положительных чисел* a и b равно корню квадратному из их произведения, т. е. $x = \sqrt{ab}$, и называется также *средним пропорциональным* этих чисел. Последнее название оправдывается тем, что число x является повторяющимся средним членом пропорции $a:x=x:b$. 77. 1. Если допустить, что неравенство

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad (1)$$

справедливо, и умножить его части на 2, то

$$(a+b) > 2\sqrt{ab}. \quad (2)$$

Вычитание из обеих частей неравенства одного и того же выражения $\sqrt{ab}$ приводит к неравенству

$$-a+b-2\sqrt{ab} > 0, \quad (3)$$

или

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0. \quad (4)$$

При $a \neq b$ всегда справедливо неравенство $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$ (квадрат любого числа, не равного нулю положителен), при $a=b$ справедливо равенство $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$.

Таким образом, неравенство (4) справедливо, если $a > 0, b > 0$, из чего следует справедливость неравенства (3), так как это то же неравенство (4), записанное в другом виде. Если к обеим частям неравенства (3) прибавить по $2\sqrt{ab}$, то получим верное неравенство (2), а если разделить обе части его на 2, то получим верное неравенство (1). Итак, доказано, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического тех же чисел (например, при $a=4$ и $b=16$ $\frac{a+b}{2} = 10, \sqrt{ab} = 8$). При $a=b$ это неравенство обращается в равенство; 2) следует из того, что $(a-b)^2 > 0$; 3) если предположить, что данное неравенство справедливо, можно прийти к очевидному неравенству $(a-b)^2 > 0$. Доказанное неравенство можно сформулировать так: сумма двух положительных взаимно

обратных чисел не меньше двух (например, при $a=3$ и $b=4$ $\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} > 2$); 4) $a^3 + ab + b^3 = a^3 + 2a \cdot \frac{b}{2} + b^3 = \left(a^3 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^3}{4}\right) - \frac{b^3}{4} + b^3 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^3$. В полученном выражении первое слагаемое $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2$ не может быть отрицательным — оно равно нулю, если $a = -b/2$; при всех остальных значениях a и b оно положительно.

Число $\frac{3}{4}b^2$ также не может быть отрицательным, отсюда $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2 > 0$ (при $a=b=0$ $a^2 + b^2 + ab = 0$); 5) после преобразований можно получить очевидное неравенство $(a-b)^2(a^2+ab+b^2) > 0$; 6) $(a^3+8) - (2a^2+4a) = (a+2)(a^2-2a+4) - 2a(a+2) = (a+2)(a^2-4a+4) = (a+2)(a-2)^2 > 0$; 7) $a-1 - \frac{a^3}{4} = \frac{4a-4-a^3}{4} = -\frac{(a-2)^2}{4} < 0$; 8) пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}, \quad \frac{a+c}{2} > \sqrt{ac}.$$

Перемножая эти неравенства (см. действия над неравенствами, п. 3), получаем $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} > \sqrt{a^3b^3c^3}$, отсюда $(a+b)(b+c)(a+c) >$

$> 8abc$. 78. 1. Решить неравенство — значит найти все те значения переменных, которые удовлетворяют неравенству (такие, при которых оно обращается в верное числовое неравенство). Эти значения называются решениями неравенства. Например, решением неравенства $2x-1 > 2$ является любое число $x > 1,5$, в частности 1,6; $\sqrt{3}$; 2; 3 и т. д. Графически этому неравенству удовлетворяют абсциссы всех точек, лежащих правее точки $x=1,5$. Множество решений неравенства $x > 1,5$ обозначают $]1,5; +\infty[$ (читается: числовой промежуток от 1,5 до плюс бесконечности). Как известно, алгебраическое уравнение имеет конечное множество решений, решение же неравенства с одной переменной заполняет целые промежутки на числовой оси. 2. Два неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают. 3. Решение неравенств производится на основании следующих теорем о равносильности неравенств.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства $f(x) > \varphi(x)$ прибавить одно и то же выражение $m(x)$, не теряющее смысла при всех допустимых значениях переменного x , то получится неравенство, равносильное данному, т. е. неравенства $f(x) > \varphi(x)$ и $f(x) + m(x) > \varphi(x) + m(x)$ равносильны.

Теорема 2. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному, т. е. неравенства $f(x) > \varphi(x)$ и $mf(x) > m\varphi(x)$ равносильны, если $m > 0$.

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число и переменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному, т. е. неравенства $f(x) > \varphi(x)$ и $mf(x) < m\varphi(x)$ равносильны, если $m < 0$.

79. 1) Если $a > 0$, то $x > b/a$ (по теореме 2 о равносильности неравенств); если $a < 0$, то $x < b/a$ (по теореме 3 о равносильности неравенств); 2) так как знаменатель отрицателен, то дробь будет положительна, если числитель отрицателен, т. е. $x-3 < 0$; множество решений этого неравенства $x < 3$, а значит, и равносильного ему неравенства $\frac{x-3}{-2} > 0$ есть числовой промежуток $] -\infty; 3[$. Графически

решением этого неравенства будут все точки, абсциссы которых расположены левее точки $x=3$; 3) так как числитель отрицателен, то неравенство справедливо, если $5-2x>0$, или $-2x>-5$, откуда $x<2,5$. Ответ: $]-\infty; 2,5[$. З а м е ч а н и е. Неравенство $-2x>-5$ можно решить иначе: $5>2x$, $2,5>x$, или $x<2,5$; 4) если $x\neq 3$, то $(x-3)^2>0$, поэтому $x+2>0$ и $x>-2$. Таким образом, данное нера-

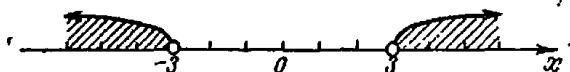


Рис. 93

венство справедливо, если $x>-2$ и $x\neq 3$. Множество решений данного неравенства состоит из всех точек числового промежутка $]-2; \infty[$; кроме точки $x=3$, или есть объединение двух множеств: $]-2; 3[\cup]3; +\infty[$, 5) $]-3; -1[\cup]-1; +\infty[$. З а м е ч а н и е. Нельзя «вычеркивать» в данном неравенстве неотрицательный множитель $(x+1)^2$,



Рис. 94

так как при $x=-1$ левая часть неравенства обращается в ноль; 6) напишем несколько целых положительных и отрицательных чисел, абсолютная величина которых больше 3, т. е. расстояния которых от начала отсчета числовой оси больше 3: $x=4, 5, 6$ и $x=-4, -5, -6$; множество решений можно записать так: $x>3$ и $x<-3$ или $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ (рис. 93); 7) целые числа, расстояния которых от начала отсчета меньше 4, удовлетворяющие этому неравенству, следующие: $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Легко сообразить, что решение неравенства можно записать так: $]-4; 4[$ (рис. 94); 8) $-8<5x-2<8$; прибавим ко всем частям этого неравенства по 2 и разделим на 5, тогда $-6<5x<8$; $-1,2<x<2$. Ответ: $]-1,2; 2[$; 9) $3x-4>5$ или $3x-4<-5$, откуда $x>3$ или $x<-1/3$. Ответ: $]-\infty; -1/3[\cup]3; +\infty[$; 10) $-6<x+2<6$, прибавим по -2 , получим $-8<x<4$ (рис. 95). Ответ: $]-8; 4[$; 11) $5x-7<3x+3$, $5x-3x<3+7$, $2x<10$.



Рис. 95

Ответ: $]-\infty; 5[$; 12) умножим обе части неравенства на 14 (наименьшее общее кратное знаменателей): $32x+2>35x-28$, $30>3x$, $3x<30$, $x<10$. Ответ: $]-\infty; 10[$; 13) освободимся от дробей: $7x+5-9x+27>48$, $-2x>16$, $x<-8$. Ответ: $]-\infty; -8[$. 80. 1) На одном и том же чертеже строим графики двух функций: $y=2x$ и $y=-3$ (см. рис. 91). Абсцисса точек пересечения этих графиков $x=1,5$, корень уравнения $2x=-3$. Из этого рисунка видно, что $2x>-3$ (т. е. прямая $y=2x$ выше прямой $y=-3$) для всех x , расположенных правее абсциссы $-1,5$, т. е. если $x>-1,5$; 2) прямая $y=2x-3$

* Раньше это решение записывали так: $-2<x<3$ и $3<x<\infty$.

выше прямой $y=1$ для всех $x>2$; 3) прямая $y=2-x$ ниже прямой $y=3$ для всех $x>-1$. 81. 1) Множество решений неравенства $x>-2$ — числовой промежуток $] -2; +\infty[$; неравенства $x>3$ — $] 3; \infty[$; неравенства $x>1$ — $] 1; +\infty[$. Решение данной системы — пересечение этих трех множеств. Ответ: $] 3; \infty[$; 2) $] -\infty; -5[$.

82. 1) $] -2; 3[$; 2) множество решений неравенства $x<0$ — числовой промежуток $] -\infty; 0[$, а множество решений неравенства $x>2$ есть $] 2; +\infty[$. Пересечение этих множеств пусто. Ответ: $\emptyset$; 3) $\emptyset$; 4) $] -4; -2[$; 5) множество решений неравенства $x>-3$ — числовой луч $] -3; +\infty[$, а неравенства $x<3$ — числовой луч $] -\infty; 3[$. Пересечение этих множеств — точка $x=3$, это и есть решение данной системы.

83. 1) Множество решений двух первых неравенств — числовой промежуток $] -\infty; 5[$, а третьего неравенства — числовой промежуток $] -2; +\infty[$. Пересечением этих множеств служит числовой промежуток $] -2; 5[$. Ответ: $] -2; 5[$; 2) $] 2; 6[$; 3) $\emptyset$. 84. 1) Эта

система приводится к простейшей $\begin{cases} 2x > -5,5, \\ x > 2. \end{cases}$ Ответ: $] 2; \infty[$; 2)

$] -\infty; -8[$; 3) $] -3,4; 3,25[$. 85. 1) Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, поэтому данное неравенство верно только в том случае, если верна хотя бы одна из систем неравенств

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ x+3>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-4<0, \\ x+3<0, \end{cases}$$

которые приводятся к простейшим: $\begin{cases} x>2, \\ x>-3, \end{cases}$ или $\begin{cases} x<2, \\ x<-3. \end{cases}$

Отсюда множество решений заданного неравенства: $] -\infty; -3[\cup] 2; \infty[$; 2) решение данного неравенства сводится к решению систем неравенств

$$\begin{cases} 5-x>0, \\ x+2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5-x<0, \\ x+2<0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $] -2; 5[$, и это есть окончательное решение данного неравенства. Вторая система не имеет решений, так как пересечение множеств $] 5; +\infty[$ и $] -\infty; -2[$ — пустое множество; 3) дробь отрицательна, если числитель и знаменатель имеют разные знаки, т. е.

$$\begin{cases} 2x-1<0, \\ x-2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-1>0, \\ x-2<0; \end{cases} \quad \text{отсюда ответ: }] \frac{1}{2}; 2[;$$

4) полагая $x \neq 1,5$, вычтем из обеих частей этого неравенства по 2: $\frac{1,5x+1}{x-1,5} - 2 > 0$; $\frac{1,5x+1-2x+3}{x-1,5} > 0$; $\frac{4-0,5x}{x-1,5} > 0$, откуда

$$\begin{cases} 4-0,5x>0, \\ x-1,5>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4-0,5x<0, \\ x-1,5<0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } 1,5<x<8, \text{ или }] 1,5; 8[.$$

З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся ошибочно «решают» это неравенство так же, как уравнение, т. е. приводят обе части неравенства к общему знаменателю $x-1,5$, а затем отбрасывают знаменатель (этим самым умножают обе части неравенства на $x-1,5$); это неверно, так как двучлен $x-1,5$ может быть как положительным, так и отрицательным. Надо твердо помнить, что умножать обе части неравенства на выражение, содержащее неизвестное, нельзя, так как

можно получить равносильное неравенство; 5) $\frac{3-2x}{x-4} - 1 < 0$;

$$\frac{3-2x-x+4}{x-4} < 0; \frac{7-3x}{x-4} < 0; \begin{cases} 7-3x < 0, \\ x-4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7-3x > 0, \\ x-4 < 0 \end{cases} \text{ откуда}$$

$x > 4$ или $x < 2\frac{1}{3}$. Ответ: $]-\infty; 2\frac{1}{3}[\cup]4; +\infty[$; 6) так как первый со-

множитель $3 > 0$, то произведение остальных сомножителей отрицательно, т. е. $(x-2)(2-5x) < 0$, откуда $x > 2$ или $x < 0,4$. Ответ: $]-\infty; 0,4[\cup]2; \infty[$; 7) решение данного неравенства состоит из всех точек числовых лучей $]-\infty; -5[$ и $]4; +\infty[$, кроме точек $x = -7$ и $x = 6$;

8) $\frac{1-x}{x} < 0$. Ответ: $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; 9) $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

86. 1. Задать функцию, определенную на числовом множестве D , — это значит указать правило, которое ставит в соответствие

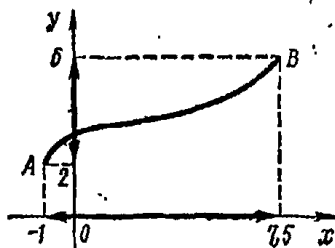


Рис. 96

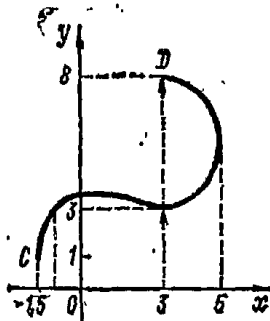


Рис. 97

числу x из множества D одно и только одно число y , называемое *значением функции* при некотором значении аргумента x . Значение функции f , соответствующее значению аргумента x , обозначается через $f(x)$. Например, запись $f(x) = 1/x^2$ означает, что правило вычисления функции f таково: надо единицу разделить на квадрат аргумента. 2. Функция может задаваться таблицей, графиком, словесным определением, но чаще всего функции задают аналитически при помощи формул. В этом случае область определения не задается. Область определения функции, заданной формулой, считают множеством всех тех значений аргумента, при подстановке которых все действия, указанные в правой части формулы, выполнимы и приводят

к действительным числам. Например, формула $y = \frac{3}{x-2}$ задает функ-

цию f , область определения которой — вся числовая прямая, за исключением точки $x=2$, так как при этом значении x деление невы-

полнимо. Формула $y = \sqrt{-x}$ задает функцию, область определения которой можно найти, решив неравенство $-x \geq 0$, что равносильно $x \leq 0$, т. е. область определения — полупрямая $]-\infty; 0]$; множество значений данной функции — полупрямая $[0; \infty[$. 3. *Графиком функции* $y=f(x)$ называется множество всех точек, у которых абсциссы принадлежат области определения функции, а ординаты равны соответствующим значениям функции. 4. Для нахождения области определения функции надо ее график спроектировать на ось Ox ; если же этот график спроектировать на ось Oy , то получится множество значений функции. На рис. 96 изображена функция, область определения которой — отрезок $[-1; 7,5]$ и множество значений — отрезок

2. 6]. 5. Да. Если каждой абсциссе соответствует единственная ордината, то соответствие, заданное графиком, является функцией. На рис. 96 кривая AB служит графиком соответствия между $X \in [-1; 7,5]$ и $Y \in [2; 6]$. Кривая CD (рис. 97), хотя и служит графиком соответствия между $X \in [-1,5; 5]$ и $Y \in [1; 8]$, однако это соответствие не является функцией, ибо абсциссе $x=3$ соответствует не единственная ордината, а две: $y_1=3$ и $y_2=8$. 6. Число a называется корнем (нулем) функции $f(x)$, если значение этой функции при $x=a$ равно нулю, т. е. $f(a)=0$. Чтобы найти корни функции $f(x)$, нужно решить уравнение $f(x)=0$. Например, корни функции $f(x)=5x^2-3x-8$ есть корни уравнения $5x^2-3x-8=0$; $x=-1$ и $x=1,6$. Геометрически корень функции означает точку пересечения (или касания) оси абсцисс с графиком функции. 7. Функция $f(x)$ называется *четной*, если область ее определения симметрична относительно начала координат и функция не меняет своего значения при изменении знака аргумента, т. е. удовлетворяет условию $f(-x)=f(x)$. Например, $f(x)=x^2$ — четная функция, так как область ее определения — числовая прямая и $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если область ее определения симметрична относительно начала координат и функция изменяет свое значение на противоположное при изменении знака аргумента, т. е. удовлетворяет условию $f(-x)=-f(x)$. Например, функция $f(x)=\sin x$ нечетна, так как $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$. График четной функции представляет собой линию, симметричную относительно оси ординат, как, например, графики функций $y=ax^2$, $y=\cos x$. График нечетной функции — линия, симметричная относительно начала координат, как, например, графики функций $y=k/x$ и $y=\sin x$. 8. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на данном интервале, если большим значениям аргумента, взятым из этого интервала, соответствуют большие значения функции, т. е. если из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$. Например, функция $y=2x+3$ — возрастающая на всей числовой оси.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на данном интервале, если большим значениям аргумента, взятым из этого интервала, соответствуют меньшие значения функции, т. е. если из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$. Например, функция $y=x^2$ при $x < 0$ убывает.

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными функциями*.

Геометрически возрастание функции означает, что точка, движущаяся по графику этой функции слева направо, поднимается при этом снизу вверх, а точка, движущаяся по графику убывающей функции слева направо, спускается сверху вниз. 9. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции: а) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат ее области определения; б) выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Число T при этом называется *периодом функции*. 10. График периодической функции состоит из бесконечного множества частей, которые повторяют ту часть графика, которая соответствует периоду. Например, график функции $y=\sin x$ в интервалах $(2\pi; 4\pi)$, $(4\pi; 6\pi)$... имеет ту же самую форму и размеры, что и в интервале $(0; 2\pi)$, т. е. график этой функции отображается сам на себя при параллельном переносе на расстояние $T=2\pi$. 11. Функция f с областью определения X и множеством значений Y называется *обратимой*, если обратное соответствие между множеством

Y и множеством X является функцией, т. е. каждому элементу, взятому из множества Y , соответствует только один элемент из множества X .

Если функция f обратима, то обратное соответствие g в этом случае называют *обратной функцией* по отношению к функции f . Например, функция $y=3x$ на множестве $X=\{-1; 0; 1; 2\}$ обратима,

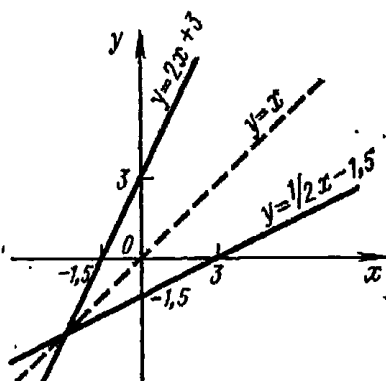


Рис. 98

ибо множество значений этой функции $Y=\{-3; 0; 3; 6\}$ и каждому элементу множества Y соответствует только один элемент множества X , что видно из пар обратного соответствия $(-3; -1); (0; 0); (3; 1); (6; 2)$. Однако функция $y=x^2$ на этом множестве необратима, ибо множество ее значений $Y=\{1; 0; 1; 4\}$ и при обратном соответствии существует такое значение функции ($y=1$), которое она принимает при различных значениях аргумента ($x=-1; x=1$). На тех промежутках, где эта функция монотонна, она обратима. 12. Чтобы получить функцию, обратную монотонной функции $y=f(x)$, нужно:

а) поменять местами переменные x и y , т. е. написать $x=f(y)$; б) из полученного равенства, как из уравнения, найти y . Например, чтобы найти функцию, обратную функции $y=2x+3$, нужно записать $x=2y+3$

и из полученного уравнения выразить y через x : $y=\frac{1}{2}x-1.5$. Гра-

фики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y=x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 98). 87. 1) $D(y)$ — любое действительное число, кроме нуля; 2) квадратные корни определены лишь для неотрицательных чисел, поэтому выражение под знаком корня должно удовлетворять неравенству $4-x>0$, откуда область определения данной функции $x<4$; $D(y)=]-\infty; 4[$; 3) $x-2>0$; $D(y)=]2; +\infty[$; 4) $x^2-4>0$, откуда $(x-2)(x+2)>0$, $D(y)=]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$; 5) знаменатель дроби ни при каких значениях x не обращается в ноль, поэтому область определения данной функции x — любое действительное число: $D(y)=R^*$; 6) $\begin{cases} x>0, \\ -x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ x\leq 0, \end{cases}$ отсюда $x=0$;

$D(y)=\{0\}$; 7) подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т. е. $\frac{3-x}{x+2}>0$, кроме того, знаменатель дроби $x+2\neq 0$, поэтому

$\begin{cases} 3-x>0, \\ x+2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3-x<0, \\ x+2<0. \end{cases}$ Отсюда область определения данной

функции $-2<x<3$; $D(y)=]-2; 3[$; 8) $\begin{cases} x+3>0, \\ -x>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>-3, \\ x<0, \end{cases}$ отсюда $-3<x<0$, $D(y)=]-3; 0[$. 88. 1) выразим x через y , тогда

* R — множество всех действительных чисел, числовая прямая.

$xu - 4u = x + 3$, или $xu - x = 4u + 3$, откуда $x = \frac{4u+3}{u-1}$, поэтому множество значений функции $y \neq 1$ или $E(y) =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$;
 2) $y = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x\right) + 6 = \left[x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 -$

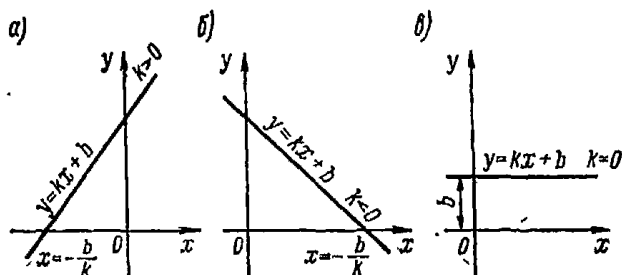


Рис. 99

$-\frac{1}{4}$, откуда $y > -\frac{1}{4}$; 3) $y = 1$ или $y = -1$; $E(y) = \{-1; 1\}$.

89. 1) $f(-x) = 2(-x^2) + 3(-x) = -2x^2 - 3x = -(2x^2 + 3x) = f(x)$, нечетная; 2) $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + (-x) + 2} - \sqrt{(-x)^2 - (-x) + 2} = \sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 2} = -(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 2}) = -f(x)$, нечетная; 3) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} + 1 = 2^x + 2^{-x} + 1 = f(x)$, четная.

90. 1) $y = \frac{1}{2}x$; 2) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; 3) $y = \sqrt{x}$. 91. 1. $C = 2\pi R$ (длина

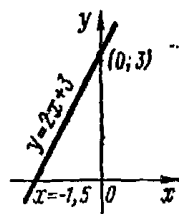


Рис. 100

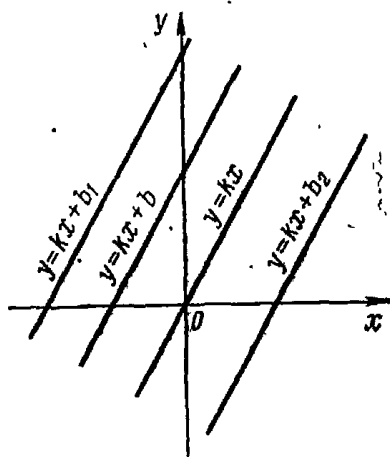


Рис. 101

окружности прямо пропорциональна радиусу, здесь $k = 2\pi$); $P = dV$ — зависимость между объемом тела и его весом; $S = vt$ — зависимость между пройденным путем и временем в равномерном движении и др.
 2. В линейной зависимости находятся скорость и время при равноускоренном движении, когда начальная скорость $v_0 \neq 0$, $v_t = v_0 + at$ (t — аргумент, v_t — функция); длина металлического стержня и его

температура: $t_1 = t_0 + t_0 \alpha t$; зависимость между температурными шкалами Цельсия и Фаренгейта: $t_F = 1,8 t_C + 32$. 92. 1) Здесь x — любое действительное число. При $k \neq 0$ y — любое действительное число, при $k=0$ $y=b$; 2) $kx+b=0$, $x=-\frac{b}{k}$; 3) при $k>0$ $y<0$, если $x<-\frac{b}{k}$, и $y>0$, если $x>-\frac{b}{k}$ (рис. 99, а); при $k<0$ $y<0$, если $x>-\frac{b}{k}$,

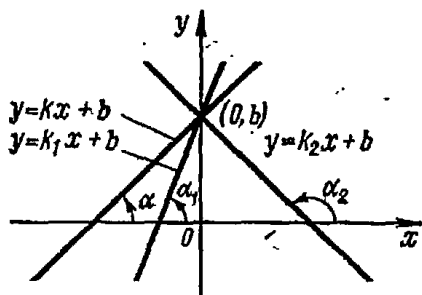


Рис. 102

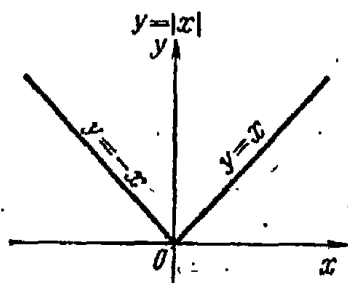


Рис. 103

и $y>0$, если $x<-\frac{b}{k}$ (рис. 99, б); при $k=0$ $y>0$, если $b>0$ (рис. 99, в), и $y<0$, если $b<0$; 4) линейная функция возрастает на всей числовой оси, если $k>0$, и убывает, если $k<0$; 5) если $f(x)=$

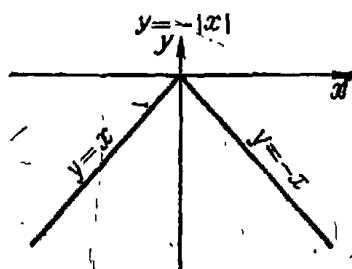


Рис. 104

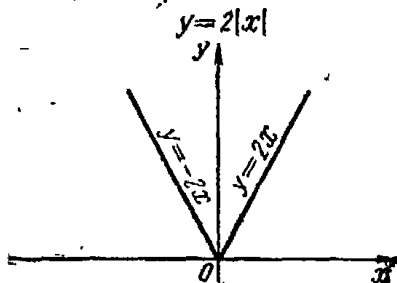


Рис. 105

$=kx+b$, то $f(-x)=k(-x)+b=-kx+b$; $f(-x) \neq f(x)$, и $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, если $b \neq 0$, линейную функцию нельзя считать ни четной, ни нечетной; при $b=0$ линейная функция $y=kx$ является нечетной. 93. 1) Функция $y=2x+3$ (рис. 100) определена на всей числовой оси. Корень функции $x=-1,5$; $y>0$ при $x>-1,5$, $y<0$ при $x<-1,5$. Функция возрастает на всей числовой оси. 94. 1) График перемещается параллельно графику данной функции (рис. 101); 2) график вращается вокруг точки $(0; b)$, образуя с положительным направлением оси Ox различные углы $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ (рис. 102).

95. 1) По определению абсолютной величины, $y = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ (рис. 103). Так как данная функция четная, то график ее симметричен относительно оси Oy , поэтому достаточно построить правую часть графика, а левая часть получится, если зеркально отразить правую часть относительно оси Oy ; 2) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x > 0, \\ x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ (рис. 104);

3) рис. 105; 4) рис. 106; 5) надо каждую точку графика $y=|x|$ сдвинуть вверх вдоль оси Oy на две единицы масштаба (рис. 107); 7) вершина графика функции $y=|x|$ расположена в точке $(0; 0)$, а графика $y=|x+2|$ — в точке $O_1(-2; 0)$. График функции $y=|x+2|$ получится, если сдвинуть график функции $y=|x|$ влево вдоль оси

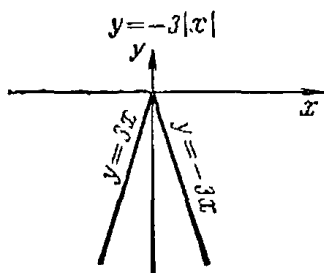


Рис. 106

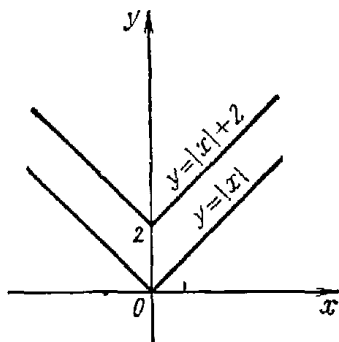


Рис. 107

Ox на две единицы масштаба или сдвинуть ось ординат вправо на две единицы масштаба (рис. 108, а, б). Замечание. График

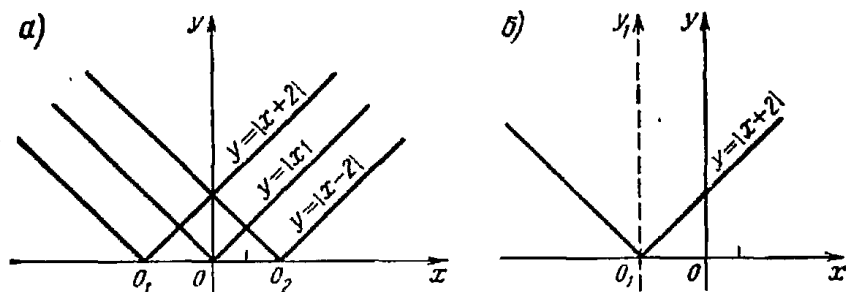


Рис. 108

функции $y=|x+2|$ можно построить также, пользуясь определением абсолютной величины:

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x+2 > 0, \\ -(x+2), & \text{если } x+2 < 0, \end{cases}$$

т. е. построить график $y=x+2$ для $x > -2$ и $y=-x-2$ для $x < -2$; 8) график функции $y=|x-2|$ получается из графика $y=|x|$ сдвигом вправо вдоль оси Ox на две единицы масштаба (рис. 108, а) или сдвигом оси ординат влево на две единицы; 9) выражения, стоящие под знаком абсолютных величин, обращаются в ноль при $x=-1$ и $x=1$, график состоит из трех звеньев: если $x < -1$, то $x+1 < 0$ и $x-1 < 0$ и тогда $y=-(x+1)-(x-1)=-2x$. Если $-1 < x < 1$, то $y=(x+1)-(x-1)=2$. Если $x > 1$, то $y=(x+1)+(x-1)=2x$ (рис. 109); 10) $y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > 1,5, \\ 3-2x, & \text{если } x < 1,5 \end{cases}$ (рис. 110); 11) $y = \begin{cases} 3-2x, & \text{если } x > 0, \\ 3+2x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ (рис. 111). 96. 1. Высота прямоугольника h

обратно пропорциональна основанию a , если площадь прямоугольника постоянна: $h=S/a$; ток I обратно пропорционален сопротивлению R , если напряжение U постоянно, $I=\frac{U}{R}$ и др. 2. График этой функции — гипербола — кривая, состоящая из двух ветвей (рис. 112). Если $k < 0$,

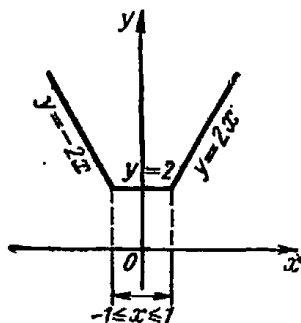


Рис. 109

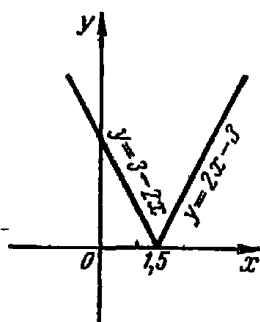


Рис. 110

то ветви лежат во втором и четвертом координатных углах. 97. 1) Здесь x — любое действительное число, кроме нуля ($x \neq 0$), y — любое действительное число, кроме нуля; 2) корней функция не имеет; 3) при $k > 0$ $y > 0$ в интервале $]0; +\infty[$, $y < 0$ в интервале

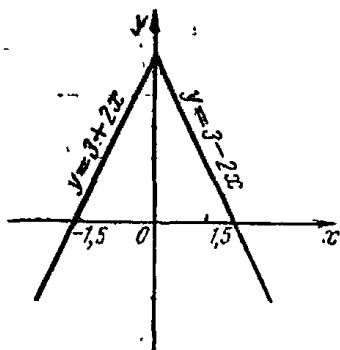


Рис. 111

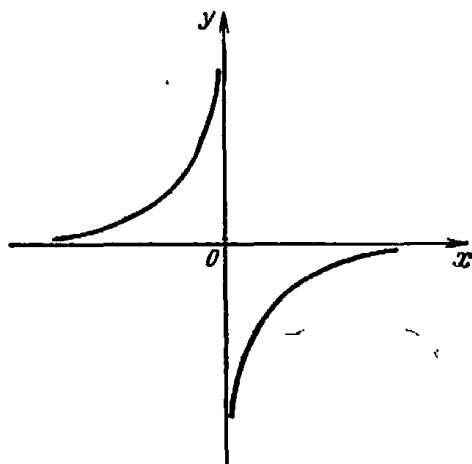


Рис. 112

$] -\infty; 0[$; 4) при $k > 0$ функция убывает в интервалах $] -\infty; 0[$ и $] 0; +\infty[$. Если $k < 0$, в этих же интервалах она возрастает; б) если $f(x) = k/x$, то $f(-x) = -k/x = -f(x)$, следовательно, эта функция нечетная. Гипербола симметрична относительно начала координат. 98. 1. С увеличением k ветви гиперболы медленней приближаются к осям координат (рис. 113). 2. а) $y \rightarrow -\infty$; б) $y \rightarrow \infty$; в) графики функции $y = -12/|x|$ можно построить, если учесть, что при $x < 0$ $y = 12/x$, а при $x > 0$ $y = -12/x$. 99. 1. Путь s , проходимый телом при равноускоренном движении, — квадратичная функция времени t .

т. е. $s = s_0 + v_0 t + 0,5at^2$. Путь, проходимый падающим телом, $s = 0,5gt^2$ и т. д. 2. Форму параболы дают струя фонтана, траектория ракеты, арки мостов и т. д. 101. 1) График функции $y = 2x^2$ (рис. 114) можно получить из графика $y = x^2$, удваивая ординату

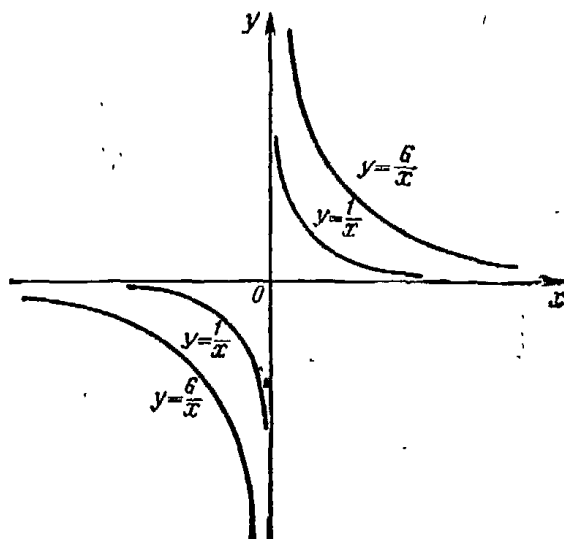


Рис. 113

каждой его точки, т. е. путем растяжения его ординат по направлению оси Oy в два раза; 2) график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из

графика $y = x^2$ путем уменьшения (сжатия) в два раза всех его ординат по направлению оси Oy ; 3) график функции $y = -x^2$ является зеркальным отражением параболы $y = x^2$; он симметричен относительно оси Ox (рис. 114); 4) график функции $y = -2x^2$ — зеркальное отражение графика $y = 2x^2$; 5) если $a > 1$, то график функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ путем растяжения всех его ординат в a раз по направлению оси Oy ; если $0 < a < 1$, то путем сжатия ординат в $1/a$ раз по направлению оси Oy , 102.

1) Строим на одном рисунке графики функций $y = x^2$ и $y = 3x + 4$ (рис. 115); абсциссы точек пересечения этих графиков $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$ — корни данного уравнения; 2) абсциссы точек пересечения графиков $y = x^2$ и $y = 6 - 5x$ $x_1 = -6$ и $x_2 = 1$; 3) из графиков функций $y = x^2$ и $y = 3x + 4$ (рис. 115) видно, что в интервале от -1 до 4 ординаты параболы $y = x^2$ меньше соответствующих ординат прямой $y = 3x + 4$ (здесь пара-

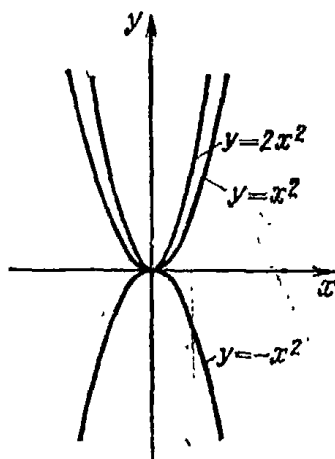


Рис. 114

бола находится ниже прямой), т. е. $x^2 < 3x + 4$, если $-1 < x < 4$; 4) $x^2 > 6 - x$, строим графики функций $y = x^2$ и $y = 6 - x$. Из рис. 116 видно, что парабола $y = x^2$ расположена выше прямой $y = 6 - x$, если $x < -3$ и $x > 2$. Значит, решение данного неравенства $] -\infty; -3[\cup] 2; +\infty[$. 103. 1. а) Чтобы из графика функции $y = ax^2$ получить график

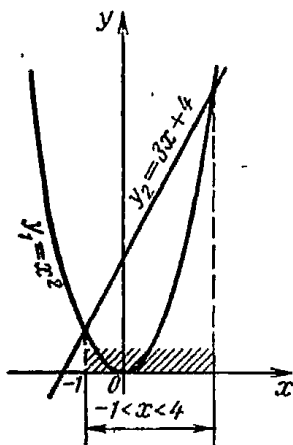


Рис. 115

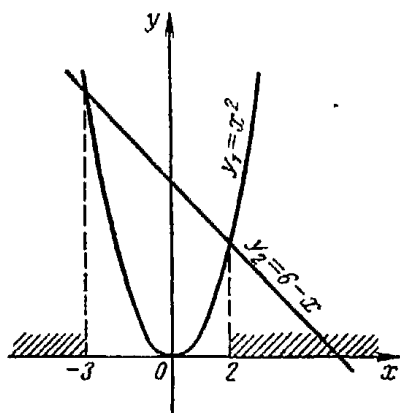


Рис. 116

функции $y = ax^2 + c$, если $c > 0$, нужно каждую точку параболы $y = ax^2$ поднять на c единиц масштаба вверх. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + c$ будут $(0; c)$. Если $c < 0$, нужно каждую точку графика $y = ax^2$ опустить на $|c|$ единиц. На рис. 117 изображены графики

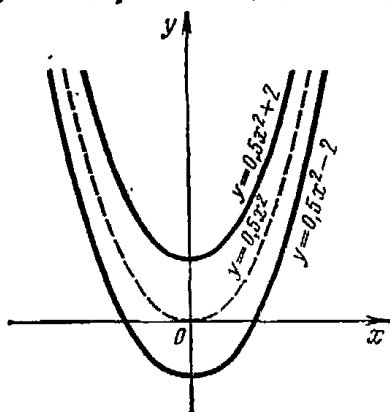


Рис. 117

функции $y = ax^2 + c$; б) график функции $y = a(x + m)^2$ можно получить из графика $y = ax^2$ посредством сдвига его на $|m|$ единиц в направлении оси абсцисс (влево, если $m > 0$, и вправо, если $m < 0$). На рис. 118, а показаны графики функций $y = 0,5x^2$, $y = 0,5(x + 2)^2$, $y = 0,5(x - 2)^2$. Вершина первой параболы расположена в точке $(0, 0)$, второй — в точке $(-2, 0)$, третьей — в точке $(2, 0)$. Замечание. Вместо сдвига графика можно сдвинуть ось Oy влево, если $m < 0$, и вправо, если $m > 0$ (рис. 118, б); в) надо сдвинуть график функции $y = ax^2$ на $|m|$ единиц в направлении оси Ox и на c единиц в на-

правлении оси Oy (если $c > 0$ поднять вверх, а при $c < 0$ опустить вниз); г) квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно представить так: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, или $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$ (дискриминант), поэтому графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола (рис. 119), получающаяся из параболы $y = ax^2$

сдвигом в направлении оси абсцисс на $-\frac{b}{2a}$, и в направлении оси ординат на $-\frac{D}{4a}$ единиц масштаба. 2. 1) Область определения — множество всех действительных чисел; множество значений функции при

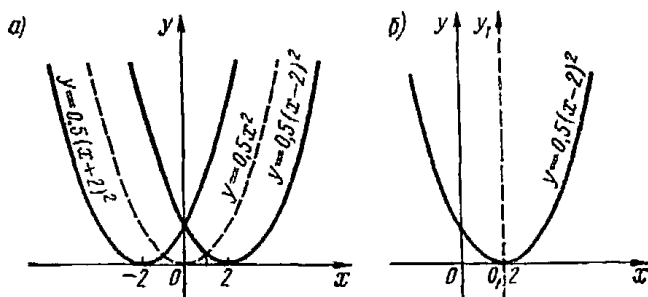


Рис. 118

$a > 0$ — $\frac{D}{4a} < y < \infty$ (рис. 119), при $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз — рис. 120) — $-\infty < y < -\frac{D}{4a}$; 2) корни этой функции — корни

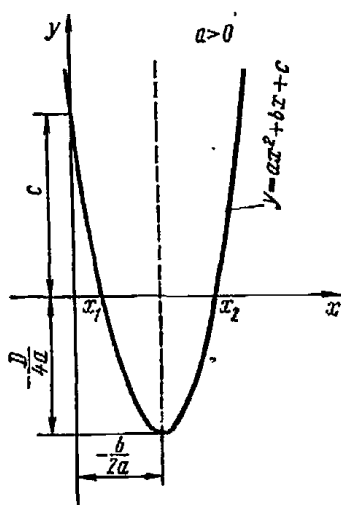


Рис. 119

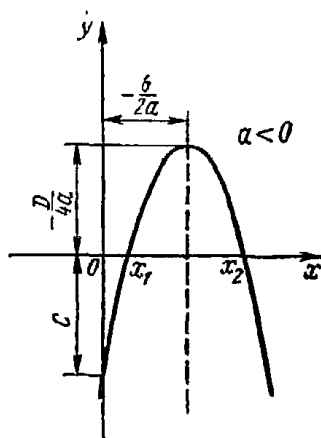


Рис. 120

квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad \text{если } D < 0,$$

то действительных корней нет; 3) при $a > 0$ $y > 0$, если $x < x_1$ и $x > x_2$; $y < 0$, если $x_1 < x < x_2$. При $a < 0$ $y > 0$, если $x_1 < x < x_2$, и $y < 0$, если

$x < x_1$ и $x > x_2$; 4) при $a > 0$, y возрастает, если $-\frac{b}{2a} < x < \infty$, y убывает, если $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$. При $a < 0$, y возрастает, если $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$, y убывает, если $-\frac{b}{2a} < x < \infty$; 5) квадратичная функция $y =$

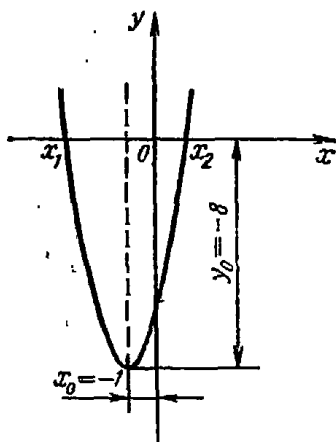


Рис. 121

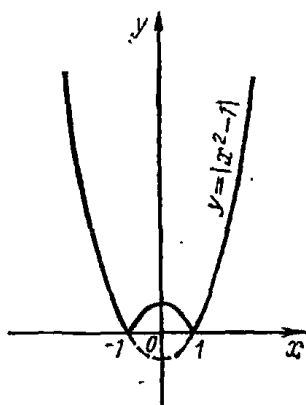


Рис. 122

$= ax^2 + bx + c$ при $b \neq 0$ не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x) \neq -f(x)$. При $b = 0$ квадратичная функция принимает вид $f(x) = ax^2 + c$ и является четной функцией. 104. 1) Сначала строим параболу $y = 2x^2$ *, затем ее вершину перемещаем из начала координат в точку $(x_0; y_0)$. Абсциссу вершины находим по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -1$. Ордината ее верши-

ны $(y_0 = -\frac{D}{4a})$, $y_0 = -8$; y_0 можно получить и другим способом, подставив в данную функцию вместо x значение $x_0 = -1$, тогда $y_0 = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$. Ось симметрии параболы проходит через вершину $(-1; -8)$ и параллельно оси Oy . По условию, $a > 0$, поэтому ветви параболы направлены вверх. Так как $D = 64 > 0$, то параболa пересекает ось Ox в двух точках. Для их нахождения полагаем $y = 0$ и решаем уравнение $2x^2 + 4x - 6 = 0$, тогда $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Ось Oy параболa пересекает в точке, где $x = 0$, тогда $y = 6$, т. е. в точке $(0; 6)$. Соединяя полученные точки (лучше с помощью шаблона), можно достаточно точно построить параболу (рис. 121); 3) $x_0 = -\frac{b}{2a} =$

$= 1 \frac{1}{4}$, $y_0 = -\frac{49}{4} = -6 \frac{1}{8}$. Ветви параболы направлены вниз; 4) по оп-

* Для быстрого построения многих квадратичных функций полезно изготовить шаблоны парабол $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 4x^2$, $y = 0,25x^2$ и др.

ределению абсолютной величины, данную функцию можно представить в виде $y = x^2 - 1$, если $x^2 - 1 > 0$, т. е. если $x < -1$ и $x > 1$, и $y = 1 - x^2$, если $x^2 - 1 < 0$, т. е. $-1 < x < 1$. Для построения графика функции $y = 1 - x^2$ в этом интервале зеркально отражаем ту часть графика функции $y = x^2 - 1$, где $y < 0$ (рис. 122); 5) функция четная, поэтому строим график функции $y = x^2 - 3x + 2$ для $x > 0$, а затем используем симметричность графика относительно оси Oy (рис. 123).

105. 1) Прямая (рис. 124, а); 2) парабола (рис. 124, б); 3) кубическая парабола (рис. 124, в); 4) прямая $y = 1$, параллельная оси Ox , из которой «выколота» точка $(0; 1)$, рис. 124, г; 5) гипербола $y = \frac{1}{x}$

(рис. 124, д); 6) рис. 124, е. 106.

При $n \in N$ степенная функция возрастает в промежутке $]0; \infty[$; при $n = -2$ убывает в промежутке $]0; \infty[$; при $n = -1$ убывает в промежутке $] -\infty; 0[$ и $]0; \infty[$.

Если $n \in N$, графики проходят через начало координат — точку $(0; 0)$ и точку $(1; 1)$. Если $n = 2$ и $n = -2$, степенная функция четная, ось Oy служит осью симметрии графика. Если $n = 1$; $n = 3$; $n = -1$, степенная функция нечетная, начало координат служит центром симметрии графика. 107. 1) $x \approx 1,25$; 2) $x \approx -1,25$; 3) $x \approx 2$;

4) $x \approx 1,4$ или $x \approx -1,4$. 108. 1) $x = \sqrt{-c/a}$ или $x = -\sqrt{-c/a}$ ($\sqrt{-c/a}$ — действительное число, если c и a имеют противоположные

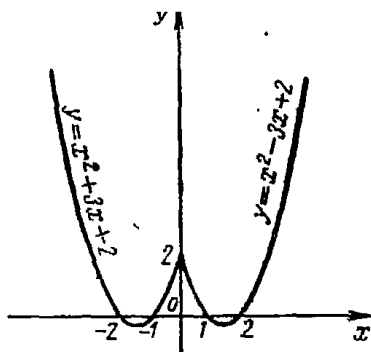


Рис. 123

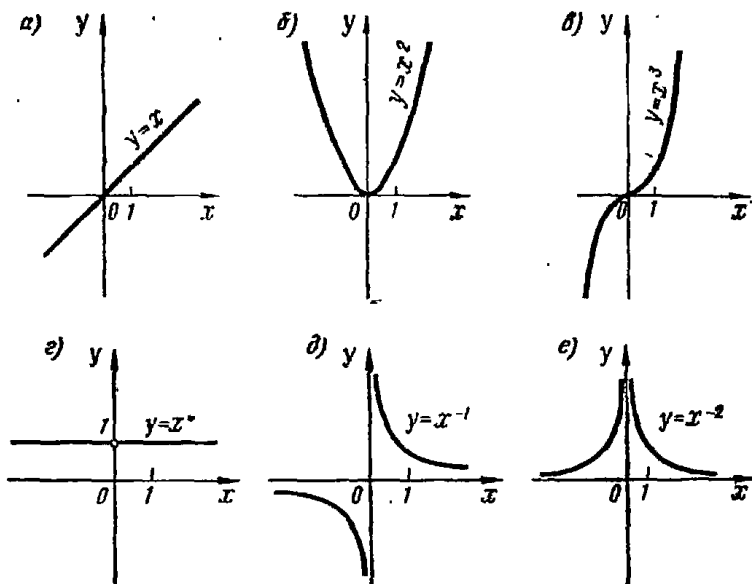


Рис. 124

знаки); 2) $x=0$ или $x=-b/a$; 3) уравнение имеет только один корень $x=0$; 4) $x=1/\sqrt{a}$ или $x=-1/\sqrt{a}$ (при $a<0$ уравнение корней не имеет). 109. 1) $\{0; 1\}$; 2) $\{-2; 2\}$; 3) $\{-6; 6\}$. 110. 1) $R=$

$$= \sqrt{\frac{S}{\pi}}; 2) R = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}. 111. 1) D < 0, \emptyset; 2) D = 0, x = -1/3;$$

3) $D = 81 > 0$, уравнение имеет два корня. 112. $D = b^2 - 36$; 1) $b = 6$ и $b = -6$; 2) $b \in [-\infty; -6] \cup [6; +\infty]$; 3) $b \in [-6; 6]$. 113. 1) В формуле (1) положить $c=0$; 2) положить $b=0$. 114. 1) $a=1$, $b=-1$,

$$c = -12, D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49; x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1}; x = 4 \text{ или } x = -3;$$

2) уравнение приводится к следующему: $3x^2 - 5x - 50 = 0$. По формуле (1) имеем: $a=3$, $b=-5$, $c=-50$, $D=625$; $x=5$ или $x=-3\frac{1}{3}$;

3) 1 способ. Приводим к уравнению $5x^2 + 2x - 7 = 0$; $a=5$, $b=2$, $c=-7$. Так как b — четное число, то решаем по формуле (2);

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 5 \cdot (-7) = 36; x = \frac{-1 \pm \sqrt{36}}{5}; x = 1 \text{ или } x = -1,4. \text{ II способ.}$$

Разделив обе части данного уравнения на 5, получим равносильное уравнение $(x+0,2)^2 - 1,44 = 0$, или $(x+0,2)^2 - 1,2^2 = 0$; $(x+0,2-1,2) \times (x+0,2+1,2) = 0$; корни его $x=-1$ или $x=-1,4$; 4) после преобразований получается уравнение $x^2 + 2ax - (2ab + b^2) = 0$; $D/4 = (a+b)^2$; если $a = -b$, получим единственный корень, если $a \neq -b$, $x=b$ или

$$x = -(2a+b); 5) D = (3+2\sqrt{2})^2; x = \frac{-(3-2\sqrt{2}) \pm (3+2\sqrt{2})}{4};$$

отсюда $x = -3/2$ или $x = \sqrt{2}$. 115. 1. Для нахождения корней функции достаточно решить уравнение $x^2 + 7x + 12 = 0$; $x = -3$ или $x = -4$.

2. По условию $y=6$, следовательно, $x^2 + 7x + 12 = 6$; $x = -1$ или $x = -6$. 3. $x^2 + 7x + 12 = x + 4$; $x_1 = -2$ или $x_2 = -4$. 116. 1) 2; $-1\frac{2}{3}$;

2) приведя уравнение к виду $2x^2 - x - 1 = 0$ и решив его, получим $x=1$ или $x=-1/2$; второй корень надо отбросить, так как при $x=-1/2$ знаменатели первой и второй дроби обращаются в ноль; 3) $x=-b$. 117. 1) $x_1 + x_2 = b/m$; $x_1 x_2 = c/m$; 2) p ; q ; 3) $a+b$, ab ;

4) $-b/a$; 0; 5) 0; c/a ; 6) 0; 0. 118. 1) $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 x_2 = 12$. Раскладываем свободный член на натуральные множители: $12 = 1 \cdot 12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$. Но $1+12 \neq 8$, $3+4 \neq 8$, а $2+6 = 8$, поэтому $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; 3) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -6$. Корни имеют разные знаки. Отрицательный корень имеет большую абсолютную величину $-6 = (-6) \cdot 1 = (-3) \cdot 2$, $-3+2 = -1$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. 119. Если сумма двух чисел равна $-p$, а их произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнений

$x^2 + px + q = 0$. Можно обратную теорему сформулировать и так: числа m и n — корни квадратного уравнения $x^2 - (m+n)x + mn = 0$.

120. 1) По теореме, обратной теореме Виета, пишем уравнение $x^2 - (2+7)x + 2 \cdot 7 = 0$, или $x^2 - 9x + 14 = 0$; 2) $x^2 + 9,5x - 5 = 0$; 3) $x^2 - 0,05x - 0,05 = 0$; 4) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$; 5) $x^2 + \sqrt{3}x = 0$; 6) $x^2 - 2x - 2 = 0$. 121. 1) Находим сумму и произведение корней данного уравнения: $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = -5$, квадрат суммы этих корней $(x_1 + x_2)^2 = 16$;

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 16$, откуда $x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2x_1x_2 = 16 - 2(-5) = 26$;

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$; но $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = -5$ (по условию), а $x_1^2 + x_2^2 = 26$; поэтому $x_1^3 + x_2^3 = 4(26 - (-5)) = 124$. 122. $x_1x_2 = -12$, но $x_1 = 3$, тогда $x_2 = -4$; $b = -(x_1 + x_2) = 1$. 123. Пусть $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, тогда имеем $x^2 - 5x = 0$. 124. Исследовать знаки корней уравнения можно лишь тогда, если корни действительные, поэтому это исследование надо начинать с определения знака дискриминанта; 1) $D = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 > 0$ — корни действительные, произведение этих

корней $x_1x_2 = \frac{8}{5} > 0$, следовательно, корни имеют одинаковые знаки,

сумма корней $x_1 + x_2 = -13/5$, поэтому оба корня отрицательны;

2) $D > 0$, $x_1x_2 = 1 > 0$ — оба корня имеют одинаковые знаки; $x_1 + x_2 = 5/2 > 0$, следовательно, оба корня положительные; 3) $D > 0$, $x_1x_2 =$

$= -4/3 < 0$ — корни имеют противоположные знаки, $x_1 + x_2 = -\frac{8}{3} < 0$,

поэтому большая абсолютная величина у отрицательного корня;

4) $D > 0$, $x_1x_2 = -300 < 0$ — корни имеют противоположные знаки, $x_1 + x_2 = 200 > 0$, поэтому большая абсолютная величина у положительного корня. З а м е ч а н и е. В двух последних примерах нет необходи-

мости вычислять дискриминант, так как если $c < 0$ и $a > 0$, то $-4ac > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$. 125. 1) Если $D = b^2 - 64 > 0$ и $x_1 + x_2 = -b > 0$;

решив систему $\begin{cases} (b-8)(b+8) > 0, \\ -b > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} b > 8, \\ b < -8, \\ b < 0, \end{cases}$ найдем, что $b < -8$

или $b \in]-\infty; -8[$; 2) если $b^2 - 64 > 0$ и $-b < 0$, т. е. если $b > 8$

или $b \in]8; \infty[$. 126. 1. В квадратном трехчлене переменное x — аргумент — может быть любым действительным числом. В квадратном уравнении переменное x означает лишь те числа, которые обращают

трехчлен в ноль. 2. Корнями трехчлена называются те значения аргумента, при которых значения трехчлена равны нулю. 3. Чтобы

найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$; корни этого уравнения и будут корнями

трехчлена. 4. Если дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$, то корни трехчлена будут равны между собой ($x_1 = x_2$), поэтому $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \times$

$\times (x - x_1) = a(x - x_1)^2$. 127. 1) $x_1 = 5$; $x_2 = 12$; $x^2 - 17x + 60 = (x - 5) \times$

$\times (x - 12)$; 2) $12(x - 3/4)(x - 2/3) = 4(x - 3/4) \cdot 3(x - 2/3) =$

$= (4x - 3)(3x - 2)$; 3) $-6(x - 1/2)(x - 2/3) = -(2x - 1)(3x - 2) =$

$= (1 - 2x)(3x - 2)$; 4) пусть $\sqrt{x} = y$, тогда $x = y^2$ и данный трехчлен

примет вид $3y^2 - 2y - 1$; если корни $y_1 = 1$, $y_2 = -1/3$; $3y^2 - 2y -$

$-1 = (3y + 1)(y - 1)$, поэтому $3x - 2\sqrt{x} - 1 = (3\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$;

5) $2\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} - 3 = (2\sqrt[3]{a} - 3)(\sqrt[3]{a} + 1)$. 128. 1) $D = 49 + 120 =$

$= 169 > 0$, корни трехчлена $x_1 = -1$, $x_2 = 10/3$, поэтому $(x + 1)(3x -$

$-10) > 0$, откуда $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ 3x - 10 < 0; \end{cases}$ отсюда $x < -1$

и $x > 3\frac{1}{3}$, что согласуется с табл. 1 (1 случай: $x < x_1$ и $x > x_2$). Итак,

множество решений — объединение числовых промежутков: $]-\infty; -1[$

$\cup]3\frac{1}{3}; \infty[$; 2) имеем $x^2 - 4x + 5 < 0$; $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$. Вы-

делим из левой части неравенства полный квадрат: $x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x) + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 5 - 4 = (x - 2)^2 + 1$, но эта функция не может принимать отрицательных значений, ибо $(x - 2)^2 > 0$, поэтому данное неравенство решений не имеет (III случай табл. 1). Ответ: $\emptyset$; 3) $D=0$; $x_1=x_2=4/3$; $9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$; эта функция положительна при всех значениях x , кроме $x=4/3$ (при этом значении x трехчлен, стоящий в левой части неравенства, обращается в нуль).

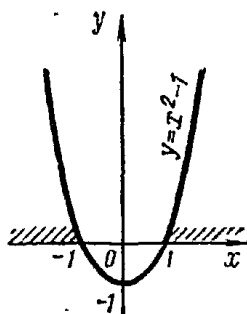


Рис. 125

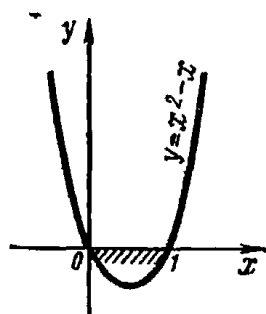


Рис. 126

Решением данного неравенства служат все числа, кроме $x=4/3$ (II случай табл. 1). Ответ: $]-\infty; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$; 4) данное неравенство равносильно следующему: $x^2 - 2x + 5 > 0$; $D < 0$. Неравенство справедливо при всех значениях x . Ответ: $]-\infty; +\infty[$; 5) I способ, $x^2 - 1 > 0$, $(x - 1)(x + 1) > 0$. Данное неравенство справедливо (функ-

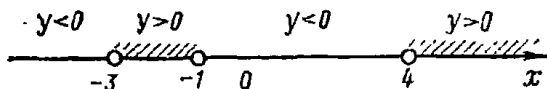


Рис. 127

ция $x^2 - 1$ положительна), если $x < -1$ и $x > 1$. Ответ: $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (рис. 125). II способ. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим $|x| > 1$, или $x < -1$ и $x > 1$; 6) $x^2 < 2$; $|x| < \sqrt{2}$, или $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Ответ: $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$; 7) $x(x - 1) < 0$; откуда $0 < x < 1$. Ответ: $]0; 1[$ (рис. 126); 8) корни многочлена, стоящего в левой части неравенства, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$ разбивают числовую ось на интервалы $]-\infty; -3[$, $]-3; -1[$, $]-1; 4[$, $]4; +\infty[$ (рис. 127). Необходимо исследовать знак левой части данного неравенства в каждом интервале. Пусть y — левая часть неравенства. При $x > 4$ (например, $x = 5$) $y > 0$, при $-1 < x < 4$ (например, $x = 2$) $y < 0$, при $-3 < x < -1$ (например, $x = -2$) $y > 0$, при $x < -3$ (например, $x = -4$) $y < 0$. Из рис. 127 видно, что $y > 0$, если $x > 4$ и $-3 < x < -1$. Ответ: $]-3; -1[\cup]4; +\infty[$. З а м е ч а н и е. Практически для решения подобного рода неравенств можно найти лишь знак y в первом справа интервале. Далее знаки y в интервалах чередуются; 9) корни $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. Левая часть неравенства y отрицательна при $3 < x < 5$ и $-3 < x < -1$. Ответ: $]-3; -1[\cup]3; 5[$ (рис. 128); 10) $x(x + 1)(x - 1) > 0$. Корни функции, стоящей в левой части неравенства, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Ответ: $]-1; 0[\cup]1; +\infty[$.

1) $x^4 - x > 0$, $x(x-1)(x^3+x+1) > 0$; так как трехчлен x^3+x+1 имеет дискриминант $D < 0$, то он при любых действительных значениях x положителен и последнее неравенство равносильно следующему: $x(x-1) > 0$. Ответ: $]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$; 12) $x^5 - x > 0$, $(x+1)(x-1)(x^2+1) > 0$; последний сомножитель всегда положителен, поэтому данное неравенство справедливо, если $x > 1$ и $-1 < x < 0$.

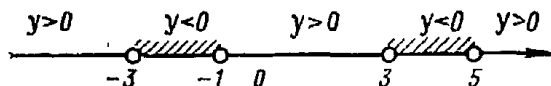


Рис. 128

Ответ: $]-1; 0[\cup]1; +\infty[$; 13) если частное $A/B > 0$, то и произведение $AB > 0^*$, поэтому $(x-5)(x+2)(x-3) > 0$. Ответ: $]-2; 3[\cup]5; \infty[$; 14) $\frac{2(x-5)(x+5)}{(x-3)(x-6)} < 0$, или $2(x-5)(x+5)(x-3)(x-6) < 0$.

Ответ: $]-5; 3[\cup]5; 6[$. 129. 1) Обозначим x^2 через y , тогда корни вспомогательного уравнения $y^2 - 10y + 9 = 0$ таковы: $y_1 = 1$, $y_2 = 9$. Множество корней данного уравнения найдем, решив уравнения

$x^2 = 1$ и $x^2 = 9$; корни первого -1 и 1 , корни второго -3 и 3 . Следовательно, множество корней данного уравнения $\{-1; 1; -3; 3\}$;

2) корни вспомогательного уравнения $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, данного $\{-4; 4; -1; 1\}$; 3) $\{-2; 2\}$; 4) $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}; -\sqrt{b}; \sqrt{b}\}$ при $a > 0$, $b > 0$.

130. С осью Ox график функции пересекается в точках $(-2; 0)$; $(2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, а с осью Oy — в точке $(0; 4)$. 131. Чтобы решить иррациональное уравнение, необходимо избавиться от содержащихся в нем квадратных корней. Для этого возводят обе части этого уравнения в квадрат, а это равносильно тому, что умножают обе части уравнения на выражение, содержащее переменное, что может привести к приобретению корней (см. замечание к 60). Например, уравнение $2x = 6$ имеет единственный корень $x = 3$; если обе части данного уравнения возвести в квадрат, то получится $4x^2 = 36^{**}$. Это уравнение кроме корня $x = 3$ имеет и другой корень $x = -3$, являющийся корнем уравнения $2x = -6$. Поэтому, решая иррациональное уравнение, надо проверить все полученные корни, подставив их в данное уравнение, и отобрать только те, которые ему удовлетворяют.

132. 1) Выражение $\sqrt{x+5}$ не может быть отрицательным числом; 2) сумма двух неотрицательных чисел и положительного числа не может равняться нулю; 3) подкоренные выражения должны быть неотрицательны, т. е. одновременно должно быть $x - 5 > 0$ и $3 - x > 0$, или $x > 5$ и $x < 3$, но не существует такого значения x , которое удовлетворяет одновременно обоим этим условиям. 133. 1) 19; 2) уединим корни $\sqrt{x-2} = 4$, $x-2 = 16$, откуда $x = 18$; 3) $4 - x = x^2 + 4x + 4$,

* Подобная замена дробного неравенства равносильным ему неравенством (произведением числителя на знаменатель) возможна только для строгих неравенств, однако неравенства $A/B > 0$ и $AB > 0$ равносильны.

** Можно переписать данное уравнение в виде $2x - 6 = 0$ и умножить обе части его на $2x + 6$, тогда получится уравнение $4x^2 - 36 = 0$, т. е. то же уравнение $4x^2 = 36$.

$x^2+5x=0$; $x_1=0$, $x_2=-5$. Подстановкой убеждаемся, что данному уравнению удовлетворяет лишь корень $x_1=0$, второй корень $x_2=-5$ — посторонний, он является корнем уравнения $-\sqrt{4-x}=x+2$ *; 4) возведя обе части уравнения в квадрат, получим $x_1=6$ и $x_2=3$; последний корень является посторонним, так как при $x=3$ правая часть уравнения отрицательна; 5) 1 способ. $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$, $(\sqrt{2x-4})^2=(1+\sqrt{x+5})^2$, $2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$, $(x-10)^2=$
 $=(2\sqrt{x+5})^2$, $x^2-20x+100=4(x+5)$, $x^2-24x+80=0$ $x_1=20$, $x_2=4$. Подстановка показывает, что данное уравнение удовлетворяется лишь корнем $x=20$; число 4 является посторонним корнем данного уравнения, оно является корнем уравнения $-2\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5}=1$. 11 способ. Умножим обе части данного уравнения на выражение, сопряженное с $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}$, тогда $(\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}) \cdot (\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5})=1(\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5})$; $(\sqrt{2x-4})^2-(\sqrt{x+5})^2=\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5}$; $x-9=\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5}$. Если полученное уравнение решить совместно с данным, то получится уравнение $2\sqrt{2x-4}=x-8$, затем уравнение $x^2-24x+80=0$, решенное выше. Этот способ целесообразнее первого, так как требует лишь однократного возведения в квадрат.

З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся при решении иррациональных уравнений совершают грубые ошибки — не уединяют корень, а возводят в квадрат каждый корень в отдельности. Это неверно, ведь если, например, $5-3=2$, то $5^2-3^2 \neq 2^2$; если желают обе части этого равенства возвысить в квадрат, надо это записать так: $(5-3)^2=2^2$; 6) 0; 7) 4; 8) $x+3+x-1+2\sqrt{x^2+2x-3}=x-1$; $3x^2+10x-13=0$; $x_1=1$, $x_2=-13/3$, второй корень посторонний; 9) 0; 10) 4. Проверим этот

корень. Левая часть: $\sqrt{3}+1$, правая часть: $\sqrt{4+\sqrt{12}}=$
 $=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$; 11) при $x < 0$ $\sqrt{x^2}=-x$, поэтому данное уравнение приводится к следующему: $\sqrt{6-x}=-x$; решив его, получим, что $x_1=-3$ и $x_2=2$, второй корень посторонний. 134. 1) Пусть $\sqrt{x}=y$, тогда $x=y^2$ и $5y^2-3y-14=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-7/5$. Подставляя вместо y полученные значения, получаем: $\sqrt{x}=2$, $\sqrt{x}=-7/5$. Второе уравнение не имеет корней, так как $\sqrt{x}$ — число неотрицательное. Из первого уравнения получаем $x=4$. Проверка показывает, что этот корень удовлетворяет данному уравнению; 2) если $\sqrt{x^2+3}=y$, то $x^2+3=y^2$ и $y^2-y=2$, откуда $y_1=2$, $y_2=-1$; $\sqrt{x^2+3}=2$ и $\sqrt{x^2+3}=-1$. Второе уравнение не имеет корней, из уравнения $\sqrt{x^2+3}=2$ получаем $x_1=1$ и $x_2=-1$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют данному уравнению; 3) $x_1=1$, $x_2=-3/2$. У к а з а н и е. Чтобы получить в левой части уравнения трехчлен, равный подкоренному выражению, надо

* Этот корень не подходит также и потому, что $\sqrt{4-x} > 0$, а значит, и $x+2 > 0$, $x > -2$.

прибавить к обеим частям этого уравнения по единице: $2x^2 + x + 1 + \sqrt{2x^2 + x + 1} = 6$, затем положить $\sqrt{2x^2 + x + 1} = y$; 4) если $\sqrt[3]{x+1} = y$, то $\sqrt[3]{(x+1)^2} = y^2$; уравнение $y^3 - 9y + 8 = 0$ имеет корни $y_1 = 1$, $y_2 = 8$; затем имеем: $\sqrt[3]{x+1} = 1$ и $\sqrt[3]{x+1} = 8$; $x_1 = 0$, $x_2 = 511$; 5) если $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} = y$, то $\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} = \frac{1}{y}$. Из уравнения $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ получаем: $y_1 = 2$; $y_2 = 1/2$. Остается решить два уравнения относительно x : $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} = 2$ и $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} = \frac{1}{2}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -6,5$. Оба корня удовлетворяют данному уравнению. 135. 1) Из второго уравнения имеем $y = 3 - 2x$; подставим это выражение y в первое уравнение:

$$\begin{cases} 4x^2 - 2x(3 - 2x) + (3 - 2x)^2 + 2x - 2(3 - 2x) - 3 = 0. \\ y = 3 - 2x. \end{cases}$$

Первое уравнение приводится к квадратному $x^2 - x = 0$, корни которого $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Заданной системе удовлетворяют пары значений x и y , которые являются решениями хотя бы одной из систем: $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x = 1. \end{cases}$ Затем для каждого значения x найдем соответствующее значение y : $y_1 = 3 - 2x_1 = 3 - 2 \cdot 0 = 3$; $y_2 = 3 - 2x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Итак, решение системы $\{(0; 3); (1; 1)\}$; 2) $\{(-5; -3); (3; 5)\}$; 3) $\{(5/3; 7/3); (1; 3)\}$; 4) для исключения члена, содержащего xu , необходимо умножить обе части первого уравнения на 2 и сложить его со вторым, тогда получится $7x + y = 5$. Решив полученное уравнение совместно с одним из данных, получим: $x_1 = 1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 10/7$, $y_2 = -5$; 5) $\{(3; 1); (2/3; -4/3)\}$. У к а з а н и е. Предварительно вычтешь почленно из первого уравнения второе; 6) 1 способ. Вычитая из первого уравнения второе, находим $xu = 2$, откуда $y = 2/x$. Подстановка значения $2/x$ вместо y в одно из данных уравнений приводит к биквадратному уравнению, множество корней которого $\{-1; 1; -2; 2\}$. Множество решений системы: $\{(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1)\}$. 11 способ. Здесь левая часть каждого уравнения — однородный многочлен второй степени, такую систему можно решить, сделав подстановку $y = kx$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} x^2 + kx^2 + k^2x^2 = 7, \\ x^2 - kx^2 + k^2x^2 = 3, \end{cases} \text{ откуда } \frac{x^2(1+k+k^2)}{x^2(1-k+k^2)} = \frac{7}{3}.$$

Далее из уравнения $2k^2 - 5k + 2 = 0$ находим $k_1 = 2$, $k_2 = 1/2$, в данную систему сводится к двум простейшим:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ y = \frac{1}{2}x; \end{cases}$$

7) $\{(3; 12); (12; 3)\}$. У к а з а н и е. Ввести вспомогательное неизвестное $\sqrt{x/y} = z$. 136. 1) Эта система может быть решена способом подстановки, однако по теореме, обратной теореме Виета, x и y можно

рассматривать как корни такого приведенного квадратного уравнения, свободный член которого равен -12 , а второй коэффициент равен 4 , т. е. уравнения $z^2 - 4z - 12 = 0$. Корни его $z_1 = 6$ и $z_2 = -6$, один из этих корней (6) можно принять за значение одного неизвестного (x), а другой (-2) — за значение второго неизвестного (y), и наоборот; получится множество решений данной системы: $\{(6; -2), (-2; 6)\}$; 2) $\left\{\left(a; \frac{1}{2}a\right); \left(\frac{1}{2}a; a\right)\right\}$; 3) 1 способ. Умножим обе части второго уравнения на 2 и сложим почленно с первым уравнением:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13; \\ 2xy = 12; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ 2xy = 12; \end{cases} \begin{cases} (x+y)^2 = 25, \\ xy = 6; \end{cases} \begin{cases} |x+y| = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Данная система равносильна следующим двум:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Эти системы решаются при помощи теоремы, обратной теореме Виета: $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 2; x_3 = -2, y_3 = -3; x_4 = -3, y_4 = -2$. Ответ: $\{(2; 3); (3; 2); (-2; -3); (-3; -2)\}$. 11 способ. Умножим на два обе части второго уравнения и сперва сложим его почленно с первым уравнением, а затем вычтем его из первого уравнения: $\begin{cases} (x+y)^2 = 25 \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases}$ Полученная система распадается на четыре линейные системы:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=-1; \end{cases} \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1; \end{cases} \begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=1, \end{cases}$$

имеющие те же решения, как найденные выше; 4) $\{(a; -a); (-a; a)\}$; б) сложив почленно левые, а затем правые части уравнений, получим $\begin{cases} 3(x+y) = 15, \\ x+y+xy = 11, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x+y=5, \\ x+y+xy=11. \end{cases}$ Подставив во второе уравнение вместо $x+y$ его значение 5 , получим $xy=6$, а из системы $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6, \end{cases}$ находим: $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 2$. Множество решений системы: $\{(2; 3); (3; 2)\}$. 137. 1) Строим график первого уравнения системы — гиперболу $y = \frac{4}{x}$. График второго уравнения $y = 5 - x$ —

прямая. Координаты точек пересечения этих графиков $(1; 4)$ и $(4; 1)$ и являются решением системы; 2) парабола $y = x^2$ и прямая $y = -x + 6$ пересекаются в двух точках $(2; 4)$ и $(-3; 9)$; 3) графики функций $y = -x^2$ и $y = |x|$ имеют лишь одну общую точку — начало координат. Решение системы: $\{(0; 0)\}$; 4) парабола $y = -x^2$ и прямая $y = -2x + 4$ не пересекаются. Следовательно, данная система не имеет решения. Если эту систему решить способом подстановки, то получим уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, у которого дискриминант $D < 0$ и поэтому оно не имеет действительных корней; 5) прямая $x + y = -1$ и окружность $x^2 + y^2 = 25$ пересекаются в точках $(3; -4)$ и $(-4; 3)$. 138. 1. Числовой последовательностью называется функция, заданная на множестве всех натуральных чисел. Числовую последовательность называют короче «последовательность». Конечная последовательность,

имеющая n членов, есть функция, задана на множестве первых n натуральных чисел. Последовательность обозначается так: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ или кратко символом (a_n) . Например, последовательность нечетных чисел задается формулой (общим членом) $a_n = 2n - 1$. Если вместо аргумента n подставить числа 1, 2, 3, то соответственно $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$. Длины сторон многоугольников, вписанных в окружность радиуса 1, образуют числовую последовательность, общий член которой $a_n = 2 \sin 180^\circ/n$ ($n \geq 3$), откуда $a_3 = 2 \sin 180^\circ/3 = \sqrt{3} \approx 1,73; a_4 = \sqrt{2} \approx 1,41; a_5 = 2 \sin 36^\circ \approx 1,18; a_6 = 1$ и т. д. 2. а) $a_1 = 5/2, a_2 = 8/3, a_3 = 11/4, a_4 = 14/5, a_5 = 17/6;$ б) $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = -\frac{1}{5};$ в) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2},$

$a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{4}{5}$. 139. 1. Пусть дана последовательность с общим членом $a_n = (n+1)/n$, члены этой последовательности $a_1 = 2; a_2 = 1,5; a_3 = 4/3 \approx 1,33 \dots; a_{10} = 1,1; \dots; a_{100} = 1,01$. Из рис. 129 видно, что члены этой последовательности при возрастании n «стремятся» к 1. Это коротко записывают так:

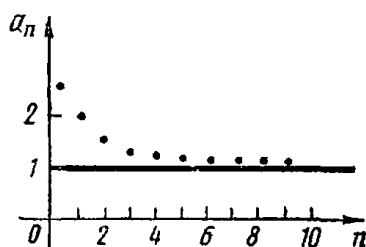


Рис. 129

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Рассмотрим модули разностей между единицей и членами данной последовательности: $|1 - a_1| = 1; |1 - a_2| = 0,5; |1 - a_3| = 0,33 \dots; |1 - a_{10}| = 0,1 \dots; |1 - a_{100}| = 0,01$. Можно предположить, что при достаточно большом n эти разности могут оказаться меньше сколь угодно малого положительного числа ε . Вычислим, например, с какого номера n верно неравенство $|1 - a_n| < 0,001$ (здесь $\varepsilon = 0,001$). Для этого решим неравенство:

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{1000}; \quad \left| \frac{n - n - 1}{n} \right| < \frac{1}{1000};$$

$$\left| -\frac{1}{n} \right| < \frac{1}{1000}; \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{1000},$$

отсюда $n > 1000$, т. е. начиная с 1001-го номера $|1 - a_n| < 0,001$.

Теперь можно понять следующие определения предела последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, если члены последовательности начиная с некоторого места отличаются от a на сколь угодно малое число.

Более строго это определение можно сформулировать так. Число a называется *пределом числовой последовательности* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$. Это коротко записывается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

З а м е ч а н и е. В рассмотренном примере $N = 1000$. 2. По условию,

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < \varepsilon, \text{ или } \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon, \text{ отсюда } \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \text{ Умножим обе части}$$

этого неравенства на положительное число $n+1$; получим $(n+1)\varepsilon > 1$, откуда $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. При $\varepsilon=0,05$ имеем $n > 19$, при $\varepsilon=0,004$ $n > 249$,

т. е. начиная с 250-го номера $\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < 0,004$. 3. По определению предела последовательности, надо доказать, что для любого положительного ε выполняется неравенство $\left| \frac{3}{4} - \frac{3n-2}{4n} \right| < \varepsilon$ для всех

$n > N$. Решая это неравенство относительно n , получим $n > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Например, при $\varepsilon=0,01$ $N=50$, при $\varepsilon=0,005$ $N=100$.

140. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2,5 + \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2,5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2,5 + 0 =$

$= 2,5$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n - 1}{5n^2 + 3n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} =$

$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = 0,6$; 3) 0; 4) 1. 141. 1. Чис-

ло b называется *пределом функции* $f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что при всех x^* , удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. Тот факт, что число b есть предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , записывается так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. 2. а) Графи-

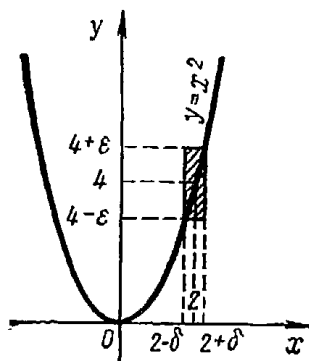


Рис. 130

ком функции служит *парабола* (рис. 130). На этом графике мы видим, что при приближении x к точке $a=2$ значения этой функции приближаются к $b=4$. Поэтому

говорят, что число 4 есть предел рассматриваемой функции при $x \rightarrow 2$.

Зададим сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Через точки $4+\varepsilon$ и $4-\varepsilon$ на оси Oy проводим прямые, параллельные оси Ox . Тогда на оси Ox найдется другое положительное число δ , такое, что для всех x , отстоящих от 2, меньше чем на δ , значения функции отличаются от 4 меньше чем на ε . Или на оси Ox найдется такая окрестность точки 2 $|2-\delta; 2+\delta|$, для всех точек которой соответствующая часть графика попадает внутрь полученного прямоугольника (покрытого штриховкой).

142. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 143. 1) Многочлен — непрерывная функция в

каждой точке числовой прямой, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$; 2) дробно-

рациональная функция непрерывна во всех точках, в которых знаменатель не обращается в ноль. Например, про функцию $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

За исключением, быть может, самой точки $x=a$.

нельзя сказать, что она непрерывна в точке $x=2$, так как в этой точке она не определена. 144. 1) Разложим на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = 1,5.$$

Переход от выражения $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ к выражению $\frac{x+2}{x+1}$ был осуществлен путем сокращения данной дроби на $x-1$. Такое сокращение не влияет на величину предела при $x \rightarrow 1$. Ведь когда мы давали определение предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то имели в виду поведение этой функции лишь для значений, достаточно близких к a . Само же значение $x=a$ исключается из рассмотрения (см. список на с. 176).

В рассмотренном выражении, если x хоть немного отличается от 1 (например, $x=0,9; 0,99; 0,999 \dots$), то выражение $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

уже имеет смысл. И хотя функции $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ и $\frac{x+2}{x+1}$ различны, но предел у них один;

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x} = 3;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}. \quad 145. 1) f(x_0) = \frac{1}{x_0}; f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x};$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} =$$

$$= \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}; \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}; \Delta x = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x_0^2}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad 2) \varphi'(x_0) =$$

$= 2x_0 + 1; \varphi'(x) = 2x + 1; 3) h'(x) = 3x^2 - 2x.$ 146. Пусть материальная точка движется по прямой по закону $S=S(t)$, тогда средняя скорость точки на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ будет $v_{\text{ср}} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$, а предел средней скорости на этом промежутке при $\Delta t \rightarrow 0$ есть мгновенная скорость точки в момент времени t_0

$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$, т. е. скорость есть производная пути по времени. Сама скорость v есть функция времени $v=v(t)$. Среднее ускорение точки на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$

есть $a_{\text{ср}} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$, мгновенное ускорение $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0)$, т. е. ускорение есть производная

скорости по времени. 147. 1. $v(t) = 2t + 3$, $v(0) = 3$ (м/с);
 б) $v(5) = S'(5) = 13$ (м/с). 2. $v(t) = S'(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - 1$, а) $a(t) =$
 $= v'(t) = t - \frac{1}{2}$; $a(4) = 3,5$ (м/с²); б) $a(t) = 0$; $t - \frac{1}{2} = 0$; $t_0 = \frac{1}{2}$ (с).

148. Касательная к линии есть предельное положение MA секущей MM_1 , когда точка M_1 стремится по линии к точке M (рис. 131). Точка M называется *точкой касания*. 149. Угловой коэффициент ка-

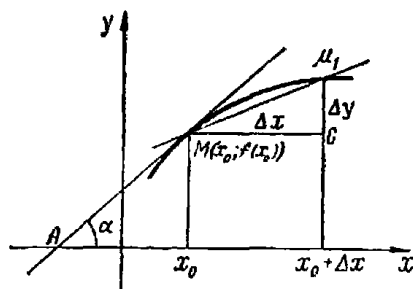


Рис. 131

сательной к графику функции равен значению производной в точке касания (рис. 131), т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{M_1 \rightarrow M} \operatorname{tg} (\angle M_1MC) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

150. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. 151. 1) $f(x_0) =$
 $= f(1) = 1$; $f'(x) = 2x$; $f'(x_0) = f'(1) = 2$. Уравнение касательной будет
 $y - 1 = 2(x - 1)$, или $y = 2x - 1$; 2) $y = 4x - 4$; 3) $y = 6x - 9$; 4) $y = 0$.

152. 1) $f'(x) = 12x^2 + 15x - 12$, $f'(0) = -12$; 2) $\varphi'(x) = (3x - 2)'(5x^2 +$
 $+ 7x + 8) + (3x - 2)(5x^2 + 7x + 8)' = 3(5x^2 + 7x + 8) + (3x - 2)(10x + 7)$,
 $\varphi'(0) = 24 - 14 = 10$; 3) $g'(x) = \frac{(x - 2)'(x + 2) - (x - 2)(x + 2)'}{(x + 2)^2} =$

$= \frac{(x + 2) - (x - 2)}{(x + 2)^2} = \frac{4}{(x + 2)^2}$, $g'(0) = 1$. 153. $f'(x) = 8$, $g'(x) =$
 $= (x + 2)'(4x - 5) + (x + 2)(4x - 5)' = 4x - 5 + 1(x + 2) = 8x + 3$; по усло-

вию, $8x + 3 = 8$, $x = 5/8 = 0,625$. 154. $f(x) = x^{3/2}$, $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} =$

$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $f'(1) = \frac{3}{2} = 1,5$; $g'(x) = \frac{(3x - 4)'(2x - 1) - (3x - 4)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} =$
 $= \frac{5}{(2x - 1)^2}$, $g'(2,5) = 5/4 = 1,25$; $f'(1) > g'(2,5)$. 155. 1) $f'(x) =$

$= 5 > 0$ — функция возрастает на всей числовой оси; 2) $g'(x) =$
 $= 6x - 12$; $g'(x) > 0$, если $6x - 12 > 0$, откуда $x > 2$, следовательно,
 функция возрастает в промежутке $[2; \infty[$; $g'(x) < 0$, если
 $6x - 12 < 0$, $x < 2$ — функция убывает в промежутке $]-\infty; 2[$.

3) $h'(x) = 3x^2 - 12$, $3x^2 - 12 < 0$, если $|x| < 2$; $-2 < x < 2$. Функция убывает в промежутке $]-2; 2[$. Функция возрастает в промежутках $]-\infty; -2[$ и $]2; \infty[$. 156. 1) $f'(x) = 2x - 6$, критическая

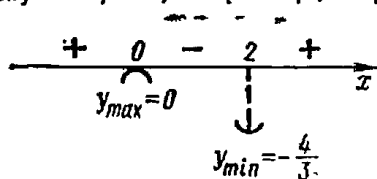


Рис. 132

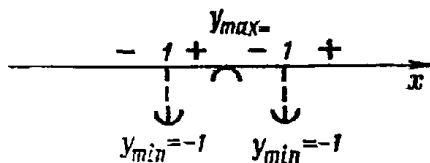


Рис. 133

точка $x=3$ делит числовую прямую на два промежутка: $f'(x) < 0$, если $x < 3$, и $f'(x) > 0$, если $x > 3$, следовательно, $x=3$ — точка минимума; 2) $g'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$. Критические точки $x=0$ и $x=2$ делят числовую прямую на три промежутка. Определяем знак производной в каждом из этих промежутков. Если $x < 0$, например $x=-1$, то $g'(x) > 0$; если $0 < x < 2$, например $x=1$, то $g'(x) < 0$; если $x > 2$, например $x=3$, то $g'(x) > 0$ (рис. 132). Следовательно, $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума*; 3) $h'(x) = 4x^2 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$. Критические точки $-1, 0, 1$ делят числовую прямую на четыре промежутка (рис. 133). $x=-1$ — точка минимума; $x=0$ — точка максимума; $x=1$ — точка минимума.

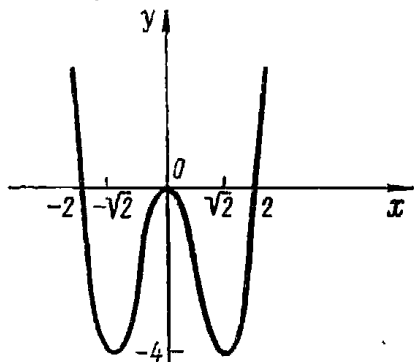


Рис. 134

157. 1) Находим область определения функции $D(y) = R$.
2) Находим производную данной функции:

$$y'(x) = 4x^2 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

3. Критические точки: $0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$.

4 Наносим критические точки на числовую ось, которая разбивается на четыре промежутка. В интервале $]-\infty; -\sqrt{2}[$ $y'(x) < 0$, следовательно, $y(x)$ убывает.

В интервале $]-\sqrt{2}; 0[$ $y'(x) > 0$, $y(x)$ возрастает.

В интервале $]0; \sqrt{2}[$ $y'(x) < 0$, $y(x)$ убывает

В интервале $]\sqrt{2}; \infty[$ $y'(x) > 0$, $y(x)$ возрастает, $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума, $y_{\min} = y(-\sqrt{2}) = -4$, $x=0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, $x=2$ — точка минимума, $y_{\min} = y(\sqrt{2}) = -4$. Строим схематически график функции, найдя предварительно точки пересечения графика с осью Ox : $y(x) = 0$, если $x^2 - 4x^2 = 0$; имеем: $x^2(x^2 - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ (рис. 134) 158. Арифметической

* В точке максимума поставлен значок $\cap$, в точке минимума $\cup$.

прогрессией называется последовательность чисел, из которых каждое (начиная со второго) получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа, которое называют *разностью прогрессии*.

159. 1. Нужно из последующего члена вычесть предыдущий; в виде формулы это можно записать так: $d = a_{k+1} - a_k$. 2. У возрастающей прогрессии $d > 0$, у убывающей $d < 0$. 3. $a_1 = a_2 - d$; $a_3 = a_2 + d$. 4. Будет. Разность при этом увеличится на 25%.

160. 1. $a_1 = a_n - d(n-1)$; $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$; $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$. 2. Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, т. е. $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ ($k > 2$), и наоборот:

если каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то такая последовательность является арифметической прогрессией. 3. Если $b = a + c - b$, или

$2b = a + c$; отсюда $b = \frac{a+c}{2}$. 4. $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 3$; $d = a_3 - a_2 = -2$; $a_1 =$

$= a_2 - d = 7$. 5. $d = 0,3$; $a_{10} = 1,2 + 0,3 \cdot 9 = 3,9$. 6. $d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = 2$.

7. $d = \frac{30-12}{7-1} = 3$, отсюда имеем 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30. 8. По ха-

рактеристическому свойству арифметической прогрессии $x = \frac{1+(11-x)}{2}$,

отсюда $3x = 12$, $x = 4$. Следовательно, арифметическая прогрессия 1; 4; 7 — искомая. 9. $a_k = 10 - 3k$, $a_{k-1} = 10 - 3(k-1) = 13 - 3k$;

$a_{k+1} = 10 - 3(k+1) = 7 - 3k$; $\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = \frac{(13-3k) + (7-3k)}{2} =$

$= 10 - 3k = a_k$, по характеристическому свойству арифметической прогрессии эта последовательность является арифметической прогрессией.

161. 1. Обозначим искомый угол через x , а разность прогрессии через d , тогда меньший угол будет $x - d$, а больший $x + d$, но сумма этих углов равна 180° , т. е. $(x-d) + x + (x+d) = 180^\circ$; отсюда $x = 60^\circ$. 2. Обозначим среднюю по величине сторону треугольника через a , разность прогрессии через d , тогда меньшая сторона будет

равна $a - d$, а большая $a + d$. По условию, $(a-d) + a + (a+d) = 45$, отсюда $a = 15$; если, например, $d = 5$ см, то стороны треугольника

будут 10, 15 и 20 см; при $d = 6$ см стороны треугольника 9, 15 и 21 см; по свойству сторон треугольника, $a + d < a + (a-d)$, или $2d < a$ и

$d < a/2$, т. е. $d < 7,5$. По смыслу задачи, $d > 0$, отсюда следует,

что этот треугольник можно построить, если $0 < d < 7,5$. 162. 1. Сумма членов, равноотстоящих от концов арифметической прогрессии, равна сумме ее крайних членов, или

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

163. 1. $a_1 = 1$, $a_n = n$; число членов также равно n , поэтому $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$; $S_{1000} = \frac{(1+1000)1000}{2} = 500 \cdot 1000$. 2. $a_1 = 1$, $d = 2$; $a_n =$

$= 1 + 2(n-1) = 2n - 1$; $S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$. 3. $S_n = \frac{2+2n}{2} \cdot n =$

$= n(n+1)$. 164. 1. По формуле (2) для S_n получим

$$S_{12} = \frac{[2 \cdot 12 + 3 \cdot (12 - 1)] \cdot 12}{2} = 57 \cdot 6 = 342. \quad 2. \quad a_1 = 18, \quad d = -2, \quad S_n = 0.$$

Составим уравнение $0 = \frac{[2 \cdot 18 + (-2)(n-1)] \cdot n}{2}$; отсюда $(36 - 2n + 2)n = 0$; $n_1 = 0$, $n_2 = 19$. Первый корень не подходит, так как число членов не может равняться нулю. 3 $S_n = \frac{[2 \cdot 2 + 3(n-1)]n}{2}$; по

условию, $S_n > 100$, поэтому получаем неравенство $\frac{(4+3n-3)n}{2} > 100$,

или $3n^2 - n - 200 > 0$. Это неравенство выполняется при $n > 8\frac{1}{3}$ и $n < -3$. Так как n может быть только натуральным

числом, то условию задачи удовлетворяют значения $n = 9; 10; 11; \dots$

4. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 148 = \frac{(1+x) \cdot n}{2}, \\ x = 1 + 5(n-1) \end{cases}$$

(n — число членов прогрессии), которая приводится к квадратному уравнению $5n^2 - 3n - 296 = 0$, откуда $n_1 = 8$, $n_2 = -7,4$ не подходит, ибо $n \in \mathbb{N}$; $x = 1 + 5(8-1) = 36$. 165. 1. Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, из которых каждое (начиная со второго) получается из предыдущего умножением на одно и то же число, которое называется знаменателем геометрической прогрессии.

$$2. \quad q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

3. Если $q > 1$, то прогрессия называется возрастающей, например $0,5; 1; 2; 4; \dots$ ($q=2$). Если $0 < q < 1$, то прогрессия называется убывающей. Например, $12; 8; \frac{16}{3}; \dots$ ($q=\frac{2}{3}$). Если $q < 0$,

то прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью, например $2; -6; 18; \dots$ ($q=-3$). Если $q=1$, все члены прогрессии равны между собой; в этом случае прогрессия является постоянной последовательностью. Условились, что u_1 и q

отличны от нуля 4. $u_1 = u_2/q$; $u_6 = u_2 q$. 5. $q = \frac{u_4}{u_3} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$u_3 = \frac{u_2}{q} = 3\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} = 6; u_1 = 6\sqrt{2} \quad 166. \quad 1. \quad u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}; \quad q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1},$$

откуда $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$; $n-1 = \log_q \frac{u_n}{u_1}$ (по определению логарифма), $n =$

$= 1 + \log_q u_n - \log_q u_1$. 2. Каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, кроме первого, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, т. е. $u_k = \sqrt{u_{k-1} u_{k+1}}$ ($k \geq 2$), или $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, и обратно: если каждый член последовательности с положительными членами (кроме первого) равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то такая последовательность является

геометрической прогрессией. 3. $b^2=ac$. 4. Это следует из того, что $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$. 5. Это следует из справедливости равенства $1^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. 6. $u_1 u_4 = u_1 (u_1 q^3) = u_1^2 q^3$; $u_2 u_3 = (u_1 q)(u_1 q^3) = u_1^2 q^3$, т. е. $u_2 u_3 = u_1 u_4 = 10$. 7. $q = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{1}{3} = \sqrt{3}$; $u_4 = \frac{1}{3} (\sqrt{3})^4 = 3$. 8. По формуле общего члена имеем: $256 = q^4$; $q = 4$ или $q = -4$. Возможны две прогрессии: 1; 4; 16; 64; 256 или 1; -4; 16; -64; 256. 167. 2. а) Применяем формулу (2) ($q=2>1$, u_n неизвестно):

$$S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023;$$

б) применяем формулу (2а):

$$S_{10} = \frac{1 \cdot [1 - (1/2)^{10}]}{1 - 1/2} = 2 [1 - (1/2)^{10}] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2 - \frac{1}{512} = 1 \frac{511}{512}.$$

168. По условию, $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, или $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 21$, $3a_1 + 3d = 21$, $a_1 + d = 7$; но это есть второй член арифметической прогрессии, т. е. $a_2 = 7$, тогда $a_1 = 7 - d$, $a_3 = 7 + d$. Затем, по условию, $u_1 = a_1 = 7 - d$, $u_2 = 7 - 1 = 6$, $u_3 = a_3 + 1 = 8 + d$. По характеристическому свойству геометрической прогрессии $u_2^2 = u_1 \cdot u_3$, отсюда $6^2 = (7 - d)(8 + d)$. Решив квадратное уравнение, получим: $d_1 = 4$; $d_2 = -5$. Второе значение d не удовлетворяет условию, так как дана возрастающая прогрессия. Искомые числа 3; 7; 11. 169. $a_2 = 13$, $a_1 = 13 - d$, $a_3 = 13 + d$; $u_1 = 9 - d$, $u_2 = 8$, $u_3 = 11 + d$; $8^2 = (11 + d)(9 - d)$. Ответ: 20; 13; 6. 170. $u_1 + u_2 + u_3 = 56$; $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 56$; числа $u - 1$, $u_1 q - 7$, $u_1 q^2 - 21$ составляют арифметическую прогрессию. По характеристическому свойству арифметической прогрессии имеем $2(u_1 q - 7) = (u_1 - 1) + (u_1 q^2 - 21)$, или $u_1 q^2 - 2u_1 q + u_1 = 8$. Считая $q \neq 1$, можно написать, что $\frac{u_1(1 + q + q^2)}{u_1(q^2 - 2q + 1)} = \frac{56}{8}$, или $\frac{1 + q + q^2}{q^2 - 2q + 1} = 7$, откуда $2q^2 - 5q + 2 = 0$; $q_1 = 2$, $q_2 = 1/2$; $u_1 = 8$, а также $u_1 = 32$. В обоих случаях искомые числа 8; 16; 32. Замечание. Эту задачу можно решить аналогично двум предыдущим (см. 168, 169): По условию, $u_1 + u_2 + u_3 = 56$; $a_1 = u_1 - 1$, $a_2 = u_2 - 7$, $a_3 = u_3 - 21$, или $a_1 + a_2 + a_3 = (u_1 - 1) + (u_2 - 7) + (u_3 - 21) = (u_1 + u_2 + u_3) - 29 = 27$; отсюда $a_2 = 9$, $a_1 = 9 - d$, $a_3 = 9 + d$; $u_1 = a_1 + 1 = 10 - d$, $u_2 = a_2 + 7 = 16$, $u_3 = a_3 + 21 = 30 + d$. Из уравнения $16^2 = (10 - d)(30 + d)$ находим $d_1 = 2$ и $d_2 = -22$, откуда имеем две арифметические прогрессии: 7; 9; 11; или 31; 9; -13. Ответ: 8; 16; 32 или 32; 16; 8. 171. 1) $q = \frac{1}{2}$;

$$S = \frac{8}{1 - 1/2} = 16; 2) q = -\frac{1}{3}, S = \frac{6}{1 - (-1/3)} = 4,5; 3) q = \frac{1}{1,2}, S = \frac{1}{1 - \frac{1}{1,2}} = 6; 4) q = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, S = \sqrt{2} : \left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = 2; 5) q = a,$$

$S = \frac{a}{1-a}$; 6) $S = \frac{x^2}{1-x^2}$. 172. 1) $\sqrt[2]{2\sqrt[2]{2\sqrt[2]{2}\dots}} = 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} \dots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}$; здесь показатель степени — сумма бесконечной геометрической прогрессии; при $q = \frac{1}{2}$ она равна $\frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$, поэтому дан-

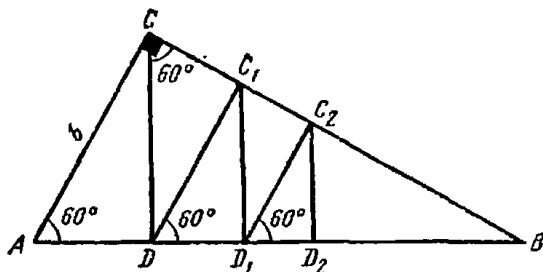


Рис. 135

ное выражение равно $2^1 = 2$; 2) $\sqrt[3]{3\sqrt[6]{6\sqrt[3]{3\sqrt[6]{6\sqrt[3]{3\sqrt[6]{6}\dots}}}}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. 173. 1. $2 = \frac{1}{1-q}$; $q = \frac{1}{2}$; прогрессия 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... 2. $S = 4$; $S_5 = 3\frac{7}{8}$; $S - S_5 = \frac{1}{8}$. 3. Периметр первого треугольника 4 м, второго — 2 м, третьего — 1 м и т. д. Сумма всех периметров представляет сумму бесконечно геометрической прогрессии; при $q = \frac{1}{2}$ $S = \frac{4}{1 - 1/2} = 8$. 4. $\angle CAD \cong \angle DCC_1 \cong \angle C_1DD_1 \cong \dots$ (рис. 135) Из треугольников ACD , DCC_1 , DDC_1 , ... следует, что

$|CD| = b \sin 60^\circ$, $|C_1D| = |CD| \sin 60^\circ = b \sin^2 60^\circ$,
 $|C_1D_1| = |C_1D| \sin 60^\circ = b \sin^3 60^\circ$...; искомая сумма
 $|CD| + |C_1D| + |C_1D_1| + \dots = b \sin 60^\circ + b \sin^2 60^\circ + b \sin^3 60^\circ + \dots$,
т. е. получилась сумма бесконечной геометрической прогрессии, где
первый член $u_1 = b \sin 60^\circ$, знаменатель $q = \sin 60^\circ$, $S = \frac{b \sin 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} =$

$$= \frac{b \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = b \sqrt{3} (2 + \sqrt{3}). \quad 174. \quad 1) \quad 0,(7) = 0,777 \dots = 0,7 + 0,07 +$$

+0,007+ ... Слагаемые этой суммы — члены бесконечной геометрической прогрессии; первый член $a_1=0,7$, знаменатель $q=0,07:0,7=0,1$.

По формуле $S=\frac{u_1}{1-q}$ имеем $0,7=\frac{0,7}{1-0,1}=\frac{7}{9}$; 2) $2,15=$

$$=2,151515 \dots =2+0,15+0,0015+0,000015+ \dots =2+\frac{0,15}{1-0,01}=$$

$$=2\frac{15}{99}=2\frac{5}{33} \text{ (здесь } u_1=0,15; q=0,01); 3) 0,1(3)=0,1333 \dots =0,1+0,03+$$

$$+0,003+0,0003+ \dots =0,1+\frac{0,03}{1-0,1}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{2}{15} \text{ (здесь } u_1=0,03;$$

$$q=0,1); 4) 1,3(27)=1,32727 \dots =1,3+\frac{0,027}{1-0,01}=1\frac{18}{55}. 175. 1) 2^3=8;$$

$$2) 6^0=1; 3) 3^{-2}=1/9; 4) 25^{1/2}=5; 5) a^c=b; 6) a^{x+y}=M; 7) a^a=N.$$

$$176. 1. 1) \log_2 0,25=-2; 2) \log_2 1=0; 3) \log_{27} 3=1/3; 4) \log_{0,9} 0,5=t.$$

$$2. e^{-kt}=\frac{N}{N_0}; \text{ откуда } \log_e \frac{N}{N_0}=-kt; t=-\frac{1}{k} \log_e \frac{N}{N_0}. 177. 1) \log_2 2^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}; 2) \log_5 -5^2=-2; 3) \log_3 3^{-1/2}=-\frac{1}{2}; 4) \log_2 (2^{1/2} \cdot 2^{1/4})=$$

$$=\log_2 2^{3/4}=\frac{3}{4}; 5) \log_2 \frac{1}{2}=-1; 6) \log_2 1=0; 7) \log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{1/2}=\frac{1}{2};$$

$$8) \log_3 27=3; \log_3 3=1; 9) \log_3^2 27=(\log_3 27)^2=3^2=9; 10) \log_3 4=2;$$

$$\log_2 \log_2 2=\log_2 1=0; 11) \log_2^3 4=(\log_2 4)^3=2^3=8; 12) \log_4 2+\log_3 3^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. 178. \text{ У к а з а н и е. } \text{Надо воспользоваться основным}$$

$$\text{логарифмическим тождеством, а также следующими свойствами степеней:}$$

$$a^{2x}=(a^x)^2; a^{-\frac{1}{2}x}=(a^x)^{-\frac{1}{2}}; a^{1+x}=a \cdot a^x; a^{2-x}=a^2 a^{-x}=\frac{a^2}{a^x}.$$

$$1) 9; 2) M; 3) (7^{\log_7 3})^2=9; 4) (5^{\log_5 3})^{-2}=3^{-2}=\frac{1}{9}; 5) (7^{\log_7 2})^{1/2}=$$

$$=2^{1/2}=\sqrt{2}; 6) (5^{\log_5 4})^{-1/2}=\frac{1}{2}; 7) (3^{-1})^{\log_3 7}=(3^{\log_3 7})^{-1}=\frac{1}{7};$$

$$8) (3^{-2})^{-2 \log_3 6}=3^{4 \log_3 6}=(3^{\log_3 6})^4=1296; 9) 3 \cdot 3^{\log_3 11}=33;$$

$$10) 5^2 - \log_5 7 = \frac{25}{5^{\log_5 7}} = \frac{25}{7}; 11) 4; 12) 3^2 \cdot 3^{-\log_3 \sqrt{3}^2} = \frac{9}{3^{\log_3 \sqrt{3}^2}} =$$

$$= \frac{9}{(\sqrt{3})^2 \log_3 \sqrt{3}^2} = \frac{9}{4}; 13) (\sqrt{2})^{\log_2 9} (\sqrt{2})^2 = 2^{\frac{1}{2} \log_2 9} \cdot 2 = 9^{1/2} \cdot 2 =$$

$$=6; 14) a^{\log \sqrt{a}^b} a^{\log a^a} = (\sqrt{a})^{2 \log \sqrt{a}^b} c = b^2 c. 179. 1) 2=3^{\log_3 2};$$

$$2) 10=5^{\log_5 10}; 3) m=n^{\log_n m}. 180. 1. \text{ Если } a < 0, \text{ например } a=-3, \text{ то при } x=1; 2; 3 \text{ получается } (-3)^1; (-3)^2; (-3)^3, \text{ т. е. } y \text{ будет}$$

$$\text{принимать то положительные, то отрицательные значения, при } x=$$

$$184$$

$-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$ у принимает значения $\sqrt{-3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[8]{-3}$, не имеющие смысла. При $a=1$ функция имеет постоянное значение $y=1$, рассмотрение ее не представляет интереса. 2. При радиоактивном распаде количество вещества изменяется со временем по закону, выражаемому показательной функцией $M=M_0a^t$, где M_0 — количество радиоактивного вещества в начальный момент, t — время распада, a — постоянная, характеризующая скорость распада вещества, M — масса оставшегося вещества. Размножение живых организмов

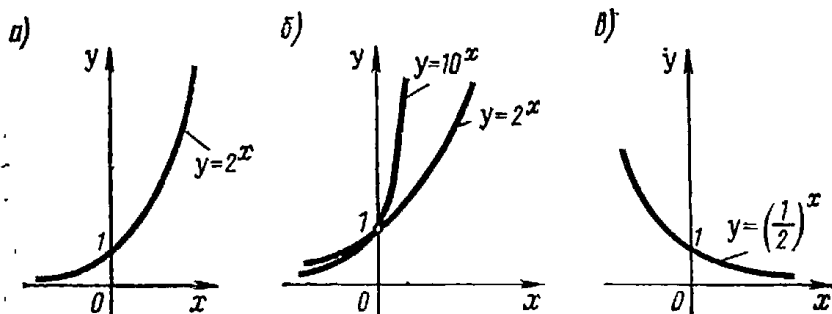


Рис. 136

происходит по закону, выражаемому формулой $N=N_0a^t$, где N_0 — количество организмов в начальный момент, a — число, характеризующее быстроту размножения, t — время размножения, N — количество организмов по истечении этого времени. 181. 1) График изображен на рис. 136, а. Основные свойства показательной функции $y=a^x$: а) функция имеет определенное значение при любом действительном значении аргумента x , т. е. областью ее определения является вся числовая прямая R ; б) функция принимает только положительные значения, т. е. множеством ее значений служит множество всех положительных чисел. Геометрически это означает, что график этой функции располагается всеми своими точками выше оси Ox ; в) при $x=0$ $y=1$, т. е. графики всех функций $y=a^x$, например $y=10^x$ и $y=2^x$, проходят через точку $(0; 1)$ (рис. 136, б); г) при $x > 0$ $y > 1$, при $x < 0$ $y < 1$; д) с возрастанием x функция монотонно возрастает. Из рис. 136, б видно, что точка, движущаяся по графику функции слева направо, поднимается снизу вверх, притом тем быстрее и круче, чем больше основание a ; е) показательная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой; 2) график изображен на рис. 136, в. Свойства а), б) и в) функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$ и при $a > 1$ (см. предыдущую задачу) совпадают; надо помнить, что если $0 < a < 1$, эта функция с возрастанием x монотонно убывает. 182. 1. При $a \neq 1$ $m=n$; если $a=1$, то m и n — любые числа. 2. $y=3^x$, $y=(\sqrt{3})^x$, $y=\pi^x$ — возрастающие функции, $y=0,9^x$, $y=0,5^x$ — убывающие. 183. 1) При основании, большем единицы, функция $y=a^x$ — возрастающая, т. е. если $x_2 > x_1$, то $y_2 > y_1$. Имеем $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, поэтому $(1,2)^{3/4} > (1,2)^{2/3}$; 2) $0,2^2 = 5^{-2}$; $-1,6 > -2$, поэтому $5^{-1,6} > 5^{-2}$, или $5^{-1,6} > 0,2^2$; 3) при основании, меньшем единицы, функция

$y=a^x$ убывающая, т. е. если $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$, в данном случае

$a=0,6 < 1$, $-1 \cdot \frac{2}{3} > -2 \cdot \frac{1}{3}$, поэтому $(0,6)^{-1 \cdot \frac{2}{3}} < (0,6)^{-2 \cdot \frac{1}{3}}$, или

$(0,6)^{-\frac{2}{3}} > (0,6)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $m < n$. 184. 1) Обозначим данную степень через y , тогда $y=(2/3)^{-4/5}$. При $0 < a < 1$ и $x < 0$ функция

$y=a^x > 1$, поэтому $y=(2/3)^{-4/5} > 1$; 2) $(1,5)^{-0,5} < 1$; 3) $a=0,8$;

$x=0,6$; $y=(0,8)^{-0,6} > 1$. 185. 1) Если $x > 0$, то $y=2^x$; если $x < 0$,

то $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Данная функция четная, поэтому сначала строим

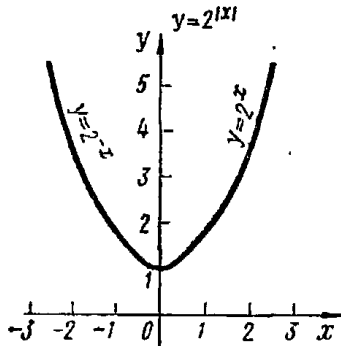


Рис. 137

правую часть графика (при $x > 0$), а затем левую (при $x < 0$), симметричную правой относительно оси Oy (рис. 137). 188. 1. Показательная функция монотонна и непрерывна на всей числовой оси, поэтому она имеет обратную функцию. Если в функции $y=a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) поменять местами переменные x и y , то из равенства $x=a^y$ по определению логарифма можно получить логарифмическую функцию $y=\log_a x$ ($a > 0$ $a \neq 1$). 2. $t =$

$= \log_a \frac{M}{M_0}$. 187. 1) График изображен

на рис. 138, а. Для построения графика этой функции можно воспользо-

ваться таблицей значений показательной функции $y=2^x$. Свойства функции $y=\log_a x$ при $a > 1$: а) функция имеет определенное значение только при положительных значениях аргумента, т. е. область опре-

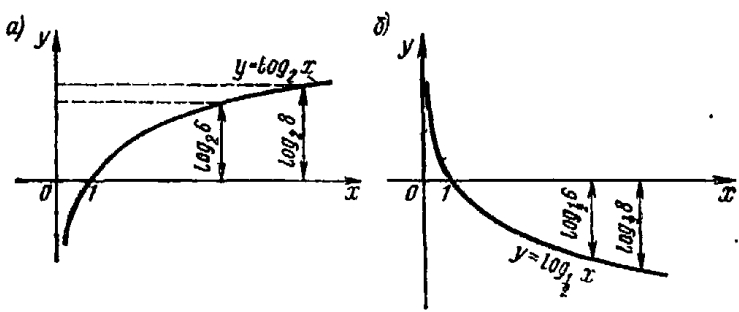


Рис. 138

деления этой функции — множество положительных чисел $[0; +\infty[$; график расположен правее оси Oy ; б) она принимает все действительные значения, т. е. множеством значений логарифмической функции является совокупность всех действительных чисел R ; в) при $a > 1$ является монотонно возрастающей, т. е. если $x_2 > x_1$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Точка, движущаяся по графику этой логарифмической кривой слева направо, поднимается снизу вверх. Из этого свойства

вытекает важное следствие, применяемое при решении логарифмических уравнений: если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию ($a \neq 1$) равны, то равны и сами эти числа; г) при $x=1$ функция $y=\log_a x$ принимает значение, равное нулю, т. е. $\log_a 1=0$ (график пересекает ось Ox в точке $(1; 0)$); д) при $x > 1$ значения функции положительны (в этом случае точки ее графика расположены выше оси Ox), а при $0 < x < 1$ — отрицательны (точки графика расположены ниже оси Ox); е) логарифмическая функция непрерывна; 2) график функции $y=\log_{1/2} x$ дан на рис. 138, б. Свойства а), б), г) и е), рассмотренные в предыдущем вопросе, сохраняются, а остальные изме-

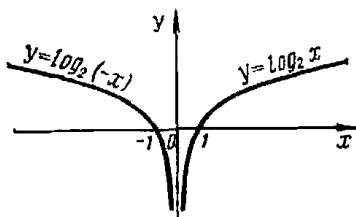


Рис. 139

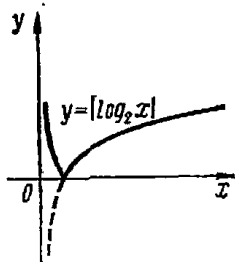


Рис. 140

няются. 188. Надо построить график, симметричный данному относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. 189. 1) Логарифмы имеют определенное значение, если числа, стоящие под знаком логарифма, положительны, поэтому $x-2 > 0$; отсюда область определения данной функции $]2; \infty[$; 2) $] -\infty; 0[$; 3) $2x^2 + x - 3 > 0$, или $(2x+3)(x-1) > 0$, отсюда $D(y) =]-\infty; -1,5[\cup]1; \infty[$; 4) так как x^2+1 всегда положительно, то x — любое действительное число; 5) $(x-3)^2 > 0$ при всех значениях x , кроме $x=3$, поэтому область определения функции $] -\infty; 3[\cup]3; \infty[$. 190. 1) $\log_3 8 > \log_3 6$ (см. рис. 138, а); 2) $\log_{1/2} 6 > \log_{1/2} 8$, так как при $0 < a < 1$ логарифмическая функция монотонно убывает (рис. 138, б); 3) $\log_3 7 > 1$, а $\log_7 6 < 1$, поэтому $\log_3 7 > \log_7 6$. 191. 1) Если основание $a > 1$, то логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны, поэтому $N < 1$; 2) $N < 1$; 3) $N > 1$. 192. 1) Областью определения данной функции являются все действительные числа, кроме нуля (логарифм нуля не существует). Данная функция четная, ибо $\log_2 |-x| = \log_2 |x|$, поэтому строим сперва график функции $y = \log_2 x$ — получаем правую часть графика, левую часть получим, зеркально отразив построенную часть графика относительно оси ординат (рис. 139); 2) строим график функции $y = \log_2 x$, затем ту часть графика, которая расположена под осью Ox , зеркально отражаем относительно оси абсцисс (рис. 140). График изображен сплошной линией; 3) область определения данной функции $x+2 > 0$, или $x > -2$. Строим сперва график функции $y = \log_2 x$, изобразив ось ординат пунктиром, затем надо сдвинуть эту ось вправо вдоль оси абсцисс на 2 (рис. 141); 4) строим график функции $y = \log_2 x$, а затем ось абсцисс, изображенную пунктиром, сдвинуть вверх на единицу вдоль оси Oy ; 5) область определения этой функции $x > 1$, при этих значениях x $y=1$, поэтому график этой функции — луч (рис. 142). 193. 2. Например, $\log_2 (4+8) \neq \log_2 4 + \log_2 8$, левая часть этого выражения $\log_2 12$ больше 3, но меньше 4, ибо $2^3 < 12$, а $2^4 > 12$. Правая же часть этого выражения $\log_2 4 + \log_2 8 = 2+3=5$. 3. Существует бесконечное множе-

ство. Указанное равенство выполняется для всех таких чисел, для которых $m+n=mn$, т. е. $m=\frac{n}{n-1}$. Достаточно подставить вместо n

любое положительное число, не равное 1; получаются искомые числа; если, например, $n=3$, то $m=1,5$ ($m+n=4,5$; $mn=4,5$); при $n=4$ $m=1\frac{1}{3}$ ($m+n=5\frac{1}{3}$, $mn=5\frac{1}{3}$) и т. д. 4. $\log_a(am)=\log_a a+\log_a m=$

$$=1+b; \log_a \frac{m}{a}=b-1; \log_a m^2=2\log_a m=2b; \log_a \sqrt{m}=\frac{1}{2}\log_a m=$$

$$=\frac{1}{2}b. \quad 194. \quad 1) \quad \frac{\log_a 8}{2\log_a 2} = \frac{\log_a 2^3}{2\log_a 2} = \frac{3\log_a 2}{2\log_a 2} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

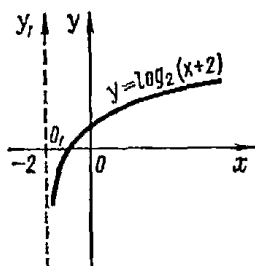


Рис. 141

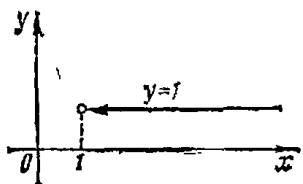


Рис. 142

$$2) \quad \frac{\log_a \sqrt[5]{9}}{\log_a \sqrt[3]{3}} = \frac{\frac{5}{5} \log_a 3}{\frac{1}{3} \log_a 3} = \frac{6}{5} = 1,2; \quad 3) \quad \frac{(1+\log_a n)(1-\log_a n)}{\log_a a + \log_a n} =$$

$$=1-\log_a n. \quad 195. \quad \log_a 6 = \log_a 2 + \log_a 3 = x+y; \quad \log_a 12 = \log_a (2 \cdot 3) =$$

$$=2\log_a 2 + \log_a 3 = 2x+y; \quad \log_a \sqrt[3]{18} = \frac{1}{3}\log_a (2 \cdot 3^2) = \frac{1}{3}(x+2y).$$

$$196. \quad 1) \quad \log_5 x = 2\log_5 a + \frac{1}{2}\log_5 b; \quad 2) \quad \log_5 y = \log_5 a + \log_5 b - 2;$$

$$3) \quad \log_5 z = 1 + \log_5 x + \log_5 y - \log_5 3 = \log_5 (x+y); \quad 4) \quad \log_5 S = \log_5 \pi +$$

$$+2\log_5 d - \log_5 4; \quad 5) \quad \log_5 V = 3\log_5 a + 2\log_5 \sin \alpha + \log_5 \operatorname{tg} \alpha = \log_5 6.$$

$$197. \quad 1) \quad \log_a x = 2\log_a b + 3\log_a (m-n^2) - \frac{1}{2}\log_a (m+n); \quad 2) \quad \log_a x =$$

$$= \log_a \log_a b^2 = \log_a (2\log_a b) = \log_a 2 + \log_a \log_a b; \quad 3) \quad \log_a x =$$

$$= \log_a (\log_a b)^2 = 2\log_a \log_a b; \quad 4) \quad \log_a x = \log_a \log_a (\sqrt{mn})^3 =$$

$$= \log_a \left[\frac{3}{2} \log_a (mn) \right] = \log_a 3 - \log_a 2 + \log_a (\log_a m + \log_a n).$$

$$198. \quad 1) \quad \log_a x = \log_a 2^2 + \log_a 3^3 = \log_a (4 \cdot 27) = \log_a 108; \quad x = 108;$$

$$2) \quad \log_a x = \log_a (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha) = \log_a 1; \quad x = 1; \quad 3) \quad \log_a x = \log_2 \frac{\log_2 25}{\log_2 5} =$$

$$= \log_2 \frac{2\log_2 5}{\log_2 5} = \log_2 2; \quad x = a; \quad 4) \quad \log_b x = \log_b c - \frac{1}{5}(\log_b \operatorname{tg} \alpha + \log_b \operatorname{ctg} \alpha) =$$

$$= \log_b c - \frac{1}{5}\log_b 1 = \log_b c; \quad x = c. \quad 199. \quad 1) \quad \text{По основному логарифмиче-}$$

скому тождеству $10^{\lg a} = a$ получаем $10^{\lg 2 + 1} = 10^{\lg 2} \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20$;
 2) $100^1 - \lg 2 = 100 \cdot 100^{-\lg 2} = 100 \cdot 100^{\lg 2} = 100 \cdot 10^{2 \lg 2} = 100 \cdot 10^{\lg 4} =$
 $= 100 \cdot 4 = 25$; 3) $100^{0,5 \lg 7 + 1} = 10^{2(0,5 \lg 7 + 1)} = 10^{\lg 7 + 2} =$
 $= 10^{\lg 7} 10^2 = 700$; 4) $\lg 2 + \lg 5 = \lg (2 \cdot 5) = 1$; 5) $\lg 300 - \lg 3 = \lg \frac{300}{3} = 2$;

6) $\lg \lg \frac{\pi}{4} + 2(\lg 75 - \lg 0,75) = \lg 1 + 2 \lg \frac{75}{0,75} = 2 \lg 100 = 4$; 7) $\cos \pi =$

$= -1$. В области действительных чисел отрицательные числа логарифмов не имеют, поэтому $\lg \cos \pi$ не существует; 8) 5. Указание. $\lg^2 0,01 = (\lg 0,01)^2 = (-2)^2 = 4$; $\lg \lg 10 = \lg 1 = 0$; $\lg 10 \lg 10 = 1 \cdot 1 = 1$;

9) 0; 10) 1. Указание. $\lg \lg 7^{10} = \lg (10 \lg 7) = \lg 10 + \lg \lg 7 = 1 + \lg \lg 7$;

11) $\lg 7 - \lg 5 = \lg \frac{7}{5} = \lg 1,4$, а $\frac{1}{2} \lg 9 - \frac{1}{3} \lg 8 = \lg 3 - \lg 2 = \lg \frac{3}{2} =$

$= \lg 1,5$, поэтому $\lg 1,5 > \lg 1,4$. 200. 1) $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$; $27^{x-1} =$
 $= (3^3)^{x-1} = 3^{3x-3}$, откуда $3^{2x} = 3^{3x-3}$, так как степени числа 3 равны

между собой, то должны быть равны и показатели степеней, поэтому
 $2x = 3x - 3$ и $x = 3$; 2) $2^{\frac{2x}{3}} = 2^{\frac{3x+1}{2}}$, откуда $\frac{2x}{3} = \frac{3x+1}{2}$, $4x = 9x + 3$

и $x = -0,6$; 3) $-1,5$. Указание. $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $3 \frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $5^{x^2-x-2} = 5^0$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; 5) $-0,5$. Указание.

$2^x 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x$; $0,01 = 10^{-2}$; 6) $|x| = 3$; $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

201. 1) 1 способ. $3^{3x} 3^1 - 5 \cdot 3^{3x} 3^{-1} = 36$; $3^{3x} (3 - 5 \cdot 3^{-1}) = 36$, или

$8^{3x} \frac{4}{3} = 36$, откуда $3^{3x} = 36 \cdot \frac{4}{3} = 27$ и $3^{3x} = 3^3$ и $x = 1$. II способ.

Вынести за скобку общий множитель с наименьшим показателем, тогда
 $3^{3x-1} (3^2 - 5) = 36$; $3^{3x-1} \cdot 4 = 36$, $3^{3x-1} = 9$, $3x - 1 = 2$, $x = 1$;

2) $5^x 5^{-1} + 5^x 5^{-2} + 5^x 5^{-3} = 155$, $5^x (5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3}) = 155$, $5^x \cdot \frac{31}{125} = 155$,

$5^x = 155 \cdot \frac{125}{31} = 625$, $x = 4$, или $5^{x-3} (5^2 + 5 + 1) = 155$, $5^{x-3} \cdot 31 = 155$,

$5^{x-3} = 5$, $x = 4$. 202. 1) $5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$. Если обозначить $5^x = y$,

то $5^{2x} = y^2$ и $5y^2 - 26y + 5 = 0$; $y_1 = 5$, $y_2 = \frac{1}{5}$, тогда $5^x = 5$ и $5^x = \frac{1}{5}$,

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 2) $9^x 9^{-1} + 3^x 3^2 - 90 = 0$, или $9 - 13^{2x} + 3^{2x} -$

$-90 = 0$. Пусть $3^x = u$, тогда получаем уравнение $\frac{1}{9} u^2 + 9u - 90 = 0$,

откуда $u_1 = 9$, $u_2 = -90$ и $3^x = 9$, $x = 2$. Второе значение u отбрасываем,

так как показательная функция 3^x не может иметь отрицательного

значения; 3) 1,5. Указание. Если $2^x + \sqrt{x^2 - 2} = y$, то $y^2 - 2,5y -$

$-6 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = -1,5$. Далее, $2^x + \sqrt{x^2 - 2} = 4$, $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$,

$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$, откуда $x = 1,5$. Уравнение $2^x + \sqrt{x^2 - 2} = -1,5$ ре-

шений не имеет; 4) $x = 1$. Указание. Записать данное уравнение

в виде $5^x - \frac{1}{5^x} = 4,8$ и обозначить $5^x = y$. 203. 1) По свойству пока-

зательной функции, это уравнение имеет единственное решение; логарифмируя обе части его, получим $x \lg 2 = \lg 6$, откуда $x = \frac{\lg 6}{\lg 2} \approx \frac{0,778}{0,301} \approx 2,56$. Можно это уравнение решить, пользуясь основным

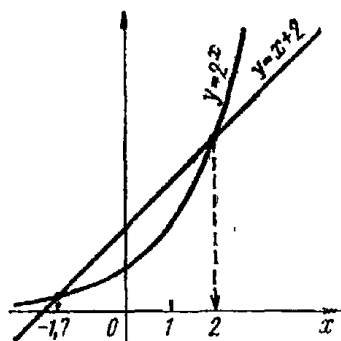


Рис. 143

логарифмическим тождеством, представив 6 в виде степени числа 2, а именно $6 = 2^{\log_2 6}$, тогда $2^x = 2^{\log_2 6}$ и $x = \log_2 6 = \frac{\lg 6}{\lg 2}$; 2) $x = \frac{\lg 100}{\lg 3} \approx 4,19$.

204. 1) Решить это уравнение логарифмированием обеих его частей невозможно. Строим на одном чертеже графики функций $y = 2^x$ и $y = x + 2$. Абсциссы точек пересечения построенных графиков (рис. 143) и будут корнями данного уравнения: $x_1 \approx -1,7$; $x_2 \approx 2$; 2) $x_1 \approx 0,31$; $x_2 \approx 4$; 3) $x \approx -1$. 205. 1) Приводим обе части неравенства к одному

основанию: $2^2(x+1) > 2^3$. При основании $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ монотонно возрастает, поэтому $2(x+1) > 3$, откуда $x \in]0,5; \infty[$; 2) $3^{x^2} > 3^4$, $x^2 > 4$, $|x| > 2$, откуда $x \in]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$; 3) $2,5^{x^2+5x} > 5^0$, $x^2+5x > 0$, $x \in]-\infty; -5[\cup]0; \infty[$; 4) $10^{-1} < 10^x < 10^3$, откуда $-1 < x < 3$, или $x \in]-1; 3[$; 5) $0,5^x > 0,5^2$. При основании, меньшем единицы, показательная функция $y = a^x$ монотонно убывает, т. е. большей степени соответствует меньший показатель, значит, $x < 2$, или $x \in]-\infty; 2[$; 6) $(0,5)^3(x+1) < 0,5^4$, $3(x+1) > 4$; $x \in]\frac{1}{3}; \infty[$; 7) $(0,1)^{2x^2+2x-3} < 0,1^2(x^2+1)$, $2x^2+2x-3 > 2x^2+2$, $x \in]2,5; \infty[$.

206. 1) По определению логарифма, $x - 3 = 2^4$, откуда корень уравнения $x = 19$; 2) $5x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $x = 1$; 3) $x = 4$ или -4 ; 4) $x^2 = x + 6$, $x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -2$; второй корень не подходит, так как основание логарифма — число положительное; 5) $x^3 = 6x + 5x^2$, $x(x^2 - 5x - 6) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$,

$x_3 = 6$. Первые два корня отбрасываем; 6) $64 \sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1$, поэтому $\frac{x^2-40x}{24} = \frac{1}{64}$, или $2^{\frac{x^2-40x}{24}} = 2^{-6}$; откуда $\frac{x^2-40x}{24} = -6$; $x_1 = 4$,

$x_2 = 36$; 7) $\frac{1}{3} \log_3(2 - \log_{1/2} x) = 9^{-1/2}$, $\log_3(2 - \log_{1/2} x) = 1$, откуда $2 - \log_{1/2} x = 3$, $\log_{1/2} x = -1$ и $x = 2$; 8) $\log_3 x = 10^0$, или $\log_3 x = 1$, откуда $x = 3$; 9) $\lg^2 x = 1$, $\lg x = 1$ и $\lg x = -1$, т. е. $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$.

207. 1) $2 \lg 3 = \lg 9$, поэтому $\lg x = \lg 9$. Но если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами эти числа, откуда $x = 9$; 2) $\lg x = \lg 5^{-2}$, откуда $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$; 3) если $x \neq 2$, то

$\lg x = 3 \lg x - 3 \lg 2$, или $2 \lg x = 3 \lg 2$, откуда $x^2 = 8$; $x_1 = 2\sqrt{2}$ и $x_2 = -2\sqrt{2}$; второй корень надо отбросить, так как отрицательные числа логарифмов не имеют; 4) $\lg 2x = \lg(x+3)$, $x=3$; 5) приводим к уравнению $x^2 - 20 = x + 10$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -5$. Проверкой можно убедиться, что оба корня удовлетворяют данному уравнению; 6) $\lg 2^4 + \lg(x-3)^2 = \lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3$; $\lg(16(x-3)^2) = -\lg((7x+1)(x-6)3)$, $16(x^2 - 6x + 9) = 3(7x^2 + x - 42x - 6)$; $x_1 = 9$, $x_2 = -3,6$. Второй корень не подходит, так как при $x = -3,6 \lg(x-3)$, $\lg(7x+1)$ и $\lg(x-6)$ не определены. 208. 1) $\lg((x-9)(2x-1)) = \lg 100$, откуда $(x-9)(2x-1) = 100$; $x_1 = 13$, $x_2 = -3,5$ отбрасываем; 2) $2 \lg 5 + \lg x = \lg 10 - \lg 2$, $\lg 25x = \lg 5$, откуда $25x = 5$, $x = 1/5$;

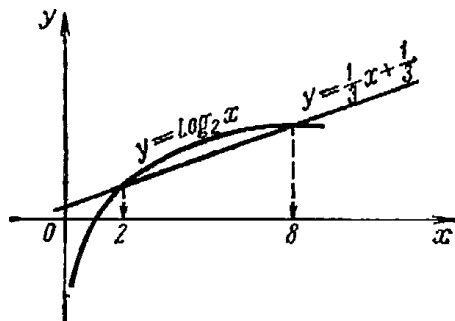


Рис. 144

3) $\lg(991 + 3\sqrt{x/2}) = \lg 1000$; $991 + 3\sqrt{x/2} = 1000$, $3\sqrt{x/2} = 9$, $3\sqrt{x/2} = 3^2$, $\sqrt{x/2} = 2$; $x = 8$; 4) упростим правую часть уравнения $x(1 - \lg 5) = -x(\lg 10 - \lg 5) = x \lg 2 = \lg 2^x$; теперь $\lg(2^x + x - 5) = \lg 2^x$, $2^x + x - 5 = 2^x$; $x - 5 = 0$ и $x = 5$. 209. 1) Пусть $\lg x = y$, тогда $y^2 + y - 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, откуда $\lg x = 1$ и $\lg x = -2$; $x_1 = 10$, $x_2 = 0,01$; 2) $\log_x^2 \sqrt{5} = (\log_x \sqrt{5})^2 = \left(\frac{1}{2} \log_x 5\right)^2 = \frac{1}{4} \log_x^2 5$, $\log_x 5 \sqrt{5} = \log_x 5^{3/2} = \frac{3}{2} \log_x 5$, теперь $\frac{1}{4} \log_x^2 5 - \frac{3}{2} \log_x 5 + \frac{5}{4} = 0$; если $\log_x 5 = y$, то $y^2 - 6y + 5 = 0$, $y_1 = 1$; $y_2 = 5$. Осталось решить уравнения $\log_x 5 = 1$ и $\log_x 5 = 5$; $x_1 = 5$, $x_2 = \sqrt[5]{5}$; 3) $\lg(\lg x(\lg(x^2 - 1))) = \lg 10$, откуда $\lg x(\lg x^2 - 1) = 10$, или $\lg x(2 \lg x - 1) = 10$. Если обозначить $\lg x$ через y , то $y(2y - 1) = 10$; $y_1 = 2,5$ и $y_2 = -2$, откуда $\lg x = 2,5$ и $x = 10^{2,5}$. Второй корень не подходит, ибо если $\lg x = -2$, то $\lg(\lg x)$ не имеет смысла. 210. 1) $\lg(x^{\lg x}) = \lg \frac{100}{x}$, $\lg x \lg x = \lg 100 - \lg x$, откуда $\lg^2 x = 2 - \lg x$; если $\lg x = y$, то $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, откуда $x_1 = 0,01$; $x_2 = 10$; 2) $\lg \sqrt{x} \lg x = \lg 100$, $\frac{1}{2} \lg x \lg x = 2$, $\lg^2 x = 4$, откуда $\lg x_1 = 2$ и $\lg x_2 = -2$; $x_1 = 100$, $x_2 = 0,01$; 3) $x_1 = 0,1$; $x_2 = 100$; 4) 10; 0,01. Указание. $x^{\log_x 100} = 100$. 211. 1) На одном чертеже строим графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ (рис. 144). Абсциссы

точек пересечения этих графиков: $x_1=2$ и $x_2=8$ — решения данного уравнения; 2) строим графики функции $y=\log_2 x^3$ и $y=\frac{6}{x}$ для $x>0$,

так как только для этих значений левая часть данного уравнения имеет определенное значение. Абсцисса точки пересечения этих графиков $x \approx 3,4$ есть решение данного уравнения; 3) $x \approx 1,6$.

212. 1) Если сложить почленно данные уравнения, то $2 \lg x=8$, $\lg x=4$, $x=10\,000$; $\lg y=1$, $y=10$, 2) упростим второе уравнение: $\lg \frac{x}{y}=\lg 1,6$

$x/y=1,6$, тогда $\begin{cases} 5x+2y=100, \\ x/y=1,6; \end{cases}$, откуда $x=16$, $y=10$. 213. 1) При

основании, большем единицы, большему логарифму соответствует большее число. Поэтому $x+3>4$, $x>1$. Ответ: $]1; \infty[$; 2) при основании, меньшем единицы, логарифмическая функция монотонно убывает (меньшему логарифму соответствует большее число), поэтому $5x>25$. Ответ: $]5; \infty[$; 3) заменим 1 на $\log_{0,3} 0,3$, тогда $\log_{0,3}(x+1)<$

$<\log_{0,3} 0,3$, $x+1>0,3$; $x \in]-0,7; \infty[$; 4) $-1<\log_2 x<1$, заменим 1 на $\log_2 2$, тогда $-\log_2 2<\log_2 x<\log_2 2$, или $\log 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 2$.

Ответ: $] \frac{1}{2}; 2[$; 5) $\log_{0,5} x>2$, или $\log_{0,5} x<-2$. Заменим 2 на $2 \log_{0,5} 0,5$, тогда $\log_{0,5} x>2 \log_{0,5} 0,5$ и $\log_{0,5} x<-2 \log_{0,5} 0,5$,

отсюда $x<0,25$, и $x>0,5^{-2}$, $x>4$. Ответ: $] -\infty; 0,25[\cup]4; \infty[$.

214. 1. По формуле (1), $\log_a N=\frac{\log_{10} N}{\log_{10} a}=\frac{\lg N}{\lg a}$, поэтому $\log_3 5=$

$=\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{b}{a}$. 2. По формуле (3), $\log_8 27=\log_{8^{1/3}} 27^{1/3}=\log_2 3$;

$\log_{0,5} \frac{1}{3}=\log_{0,5} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-\log_2 3$. Данное выражение равно нулю.

3. $\log_{1/2} 81=\log_{4^{1/2}} 81^{1/2}=\log_2 9$. По формуле (2), $\log_9 2 \cdot \log_2 9=1$.

215. 1) Упростим правую часть уравнения $2 \log_9 4=2 \log_{9^{1/2}} 4^{1/2}=$

$=2 \log_3 2$, $3 \log_{27} 2=3 \log_{27^{1/3}} 2^{1/3}=3 \cdot \frac{1}{3} \log_3 2=\log_3 2$. Значит,

$\log_3 x=2 \log_3 2+\log_3 2$, откуда $\log_3 x=3 \log_3 2$; $x=8$; 2) $\log_2 x=\frac{\lg x}{\lg 2}$,

$\lg x=\frac{\lg x}{\lg 5}$, $\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 5}=2$ (но $\lg 5=\lg \frac{10}{2}=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2$);

$\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{1-\lg 2}=2$, откуда $\lg x-\lg 2 \lg x+\lg 2 \cdot \lg x=2 \lg 2(1-\lg 2)$;

так как $1-\lg 2=\lg 5$, то $\lg x=2 \lg 2 \cdot \lg 5$, $\lg x=\lg 4 \cdot \lg 5$;

$x=10^{\lg 4 \cdot \lg 5}=(10^{\lg 4})^{\lg 5}=4^{\lg 5}$; 3) по формуле (2), $\log_x 10=\frac{1}{\lg x}$.

Получаем уравнение $\frac{1}{\lg x}+\lg x=2$. Заменив $\lg x$ на y , имеем

$1/y+y=2$, откуда $y_1=y_2=1$, $\lg x=1$, $x=10$; 4) $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$.

По формуле (1), $\log_4(x+12) = \frac{\log_2(x+12)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x+12)$. Получаем

уравнение $\frac{1}{2} \log_2(x+12) \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 1$, или $\log_2(x+12) = 2 \log_2 x$, $x+12 = x^2$; $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; x_2 не подходит, так как $x > 0$ и $x \neq 1$.

216. 1) $\frac{1}{\lg x} = \log_x 10$; $y = x^{\log_x 10} = 10$ ($x > 0$; $x \neq 1$). Можно заменить

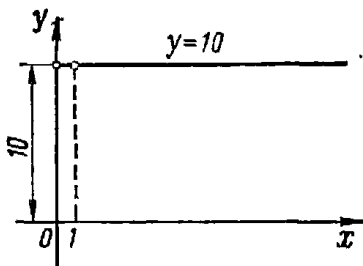


Рис. 145

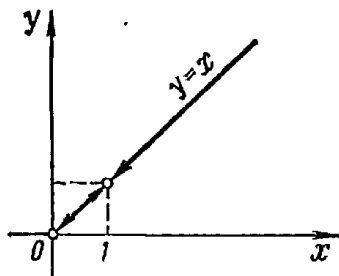


Рис. 146

в условии x на $10^{\lg x}$, тогда $y = (10^{\lg x})^{\lg x} = 10$. График изображен на рис. 145; 2) $\frac{1}{\log_x 10} = \log_{10} x = \lg x$, поэтому $y = 10^{\lg x} = x$ ($x > 0$; $x \neq 1$) (рис. 146).

217. Число e — одна из важнейших постоянных математического анализа, оно задается формулой $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Доказано, что этот предел существует и $e \approx 2,71828 \dots$ (число иррациональное). 218. 1. *Натуральный логарифм* — логарифм, основанием которого является число e ; обозначается $\ln a$, читается «натуральный логарифм числа a ». 2. а) 1; б) 2; в) 10. 219. 1) По формуле $(uv)' = u'v + uv'$ имеем $y' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$;

2) $y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = x(\ln x^2 + \ln e) = x \ln(ex^2)$;

3) $y' = \frac{(5^x)'(x+1) - 5^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{5^x \ln 5(x+1) - 5^x}{(x+1)^2} = \frac{5^x((x+1) \ln 5 - 1)}{(x+1)^2}$;

4) $y' = (x^3)' \log_2 x + x^3 (\log_2 x)' = 3x^2 \log_2 x + \frac{x^3}{x \ln 2} = x^2(3 \log_2 x + 1/\ln 2)$, но $1/\ln 2 = \log_2 e$ (см формулу на с. 51);

получим $y' = x^2(3 \log_2 x + \log_2 e) = x^2 \log_2(ex^3) = \frac{3x^2 \ln(ex)}{\ln 2}$. 220. $x_0 = 0$,

$f(x_0) = 1$; $f'(x) = e^x$; $f'(x_0) = e^0 = 1$. По формуле $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ имеем $y - 1 = 1(x - 0)$; отсюда $y = x$. 221. $f(x_0) = \ln 1 = 0$; $f'(x) = 1/x$;

$f'(x_0) = f'(1) = 1$; $y - 0 = 1(x - 1)$; $y = x - 1$. 223. 1. Множество называется *упорядоченным*, если можно указать, какой элемент множества считается первым, какой — вторым, третьим вплоть до n -го элемента.

2. Элементы упорядоченного множества заключаются в круглые скобки, из данного множества можно получить два упорядоченных множества: $(a; b)$ и $(b; a)$.

3. Из этого множества можно

образовать 6 различных упорядоченных множеств $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$. 224. $P_3 = 3! = 6$ (трехзначных чисел), они таковы: 123, 132, 213, 231, 312, 321. 225. $P_4 = 4! = 24$, т. е. эти путевки можно распределить 24 способами. 226. $P_4 = 4! = 24$ способами. 227. $P_4 = 4! = 24$ вариантов. 228. Всего перестановок из четырех цифр будет $4! = 24$. Но перестановки, начинающиеся с нуля, не образуют четырехзначного числа, они составляют четвертую часть всех перестановок, т. е. $24:4 = 6$; таким образом, различных четырехзначных чисел будет $24 - 6 = 18$. 229. 1) $\frac{111}{101} = \frac{10111}{101} = 11$; 2) $\frac{101}{81} = \frac{819 \cdot 10}{81} = 90$; 3) $\frac{7161}{9151} = \frac{71(516)}{(718 \cdot 9)51} = \frac{6}{8 \cdot 9} = \frac{1}{12}$; 4) $\frac{51+61}{41} = \frac{415+416 \cdot 6}{41} = \frac{415(1+6)}{41} = 35$. 230. 1) $\frac{x!(x+1)}{x!} = 6$, отсюда $x = 5$; 2) если учесть, что $(n+1)! = (n-1)!n(n+1)$, уравнение примет вид $n(n+1) = 30$, или $n(n+1) = 5 \cdot 6$, но n и $n+1$ — последовательные натуральные числа, отсюда $n = 5$; 3) 6. 231. 1. См. с. 10. 2. Это множество имеет следующие четыре подмножества: пустое множество $\emptyset$ (пустое множество считается подмножеством любого множества), два одноэлементных подмножества $\{a\}$ и $\{b\}$ и одно двухэлементное $\{a; b\}$ — само множество A . 3. $\emptyset$; $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$; $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$; $\{a; b; c\}$ — всего 8 подмножеств. 232. 1) $C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{0!4!}$, учитывая, что $0! = 1$, имеем $C_4^0 = 1$; 2) $C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = 4$; 3) $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$; 4) $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$; 5) $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$. 233. 1) $C_n^0 = 1$; 2) $C_n^1 = n$; 3) $C_n^n = 1$. 234. По формуле (2), $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ способов. 235. $C_{40}^2 = \frac{40 \cdot 39}{2!} = 780$ вариантов. 236. $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ способов. 237. $C_8^2 = 28$ (прямых). 238. Различных произведений, содержащих два сомножителя, будет $C_5^2 = 10$; три сомножителя — $C_5^3 = 10$; четыре сомножителя — $C_5^4 = 5$. 239. 1) $C_{20}^{19} = C_{20}^{20-19} = C_{20}^1 = 20$; 2) $C_{20}^{17} = C_{20}^{20-17} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$; 3) $C_{100}^{98} = C_{100}^{200-98} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. 240. 1) $\frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} = 6$, $(x-1)(x-2) = 4 \cdot 3$, $x = 5$; 2) по свойству числа сочетаний имеем: $C_x^{x-2} = (x-2) = 28$, $C_x^2 = 28$; $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 28$, откуда $x = 8$. 241. 1) $A_5^1 = 5$; 2) $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$; 3) $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 4) $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$; 5) $A_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. 242. $A_3^2 = 4 \cdot 3 = 12$ чисел. 243. $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов. 244. 1) $x(x-1) = 20$; $x(x-1) = 5 \cdot 4$; $x = 5$; 2) $x(x-1)(x-2) = 72$; так как $x \neq 0$, то $(x-1)(x-2) = 9 \cdot 8$; $x-1 = 9$, $x = 10$; 3) $x(x-1) = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; $6x(x-1) = x(x-1)x \cdot (x-2)$; так как $x > 1$, то уравнение приводится к следующему

$x-2=6$, откуда $x=8$. 245. 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. 2. $(n+1)$ член. 3. Если в формуле (1) положить $a=1$ и $b=1$, то $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^k+\dots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$. 246. 1) $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$; 2) $(x^{1/2}+y^{1/2})^5=x^{5/2}+5x^{3/2}y^{1/2}+10x^{3/2}y^{1/2}+10xy^{3/2}+5x^{1/2}y^3+y^{5/2}$; 3) $(a+1)^6=a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$; 4) $(x^{-1}+2)^4=x^{-4}+8x^{-3}+24x^{-2}+32x^{-1}+16$. 247. По формуле общего члена (3), где $n=10$, $k+1=6$, $k=5$, имеем $T_{6+1}=C_{10}^5a^5b^5=C_{10}^5a^5$; 2) $T_{4+1}=$

$=(-1)^4 C_6^4 (x^{-1})^4 x^2 = C_6^2 x^{-2} = \frac{15}{x^2}$; 3) всего членов разложения 8; средние члены расположены на 4-м и 5-м местах, $T_{3+1}=(-1)^3 C_7^3 (2^{2/3})^3 (2^{1/2})^4 = -C_7^3 2^3 \cdot 2^2 = -560$; $T_{4+1}=(-1)^4 C_7^4 \times \times (2^{2/3})^4 (2^{1/2})^3 = C_7^3 2^{8/3} 2^{3/2} = C_7^3 2^{25/6} = C_7^3 2^{4\frac{1}{6}} = 35 \cdot 16 \sqrt[6]{2} = 560 \sqrt[6]{2}$. 248. Общий член разложения $T_{k+1}=C_{10}^k (\sqrt[3]{a})^{10-k} \times \times (\sqrt{a})^k = C_{10}^k a^{\frac{10-k}{3}} a^{\frac{k}{2}} = C_{10}^k a^{\frac{20+k}{6}}$. По условию, показатель степени при a равен 4, откуда $\frac{20+k}{6}=4$, $k=4$. Следовательно, искомый

член расположен на 5-м месте: $T_{4+1}=C_{10}^4 (\sqrt[3]{a})^6 (\sqrt{a})^4 = 210a^4$. 249. По формуле общего члена, где $k=2$, имеем $T_{2+1}=C_n^2 x^{2(n-2)} \left(\frac{1}{4}\right)^2$,

т. е. коэффициент при x равен $C_n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 31$, или $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = 31$,

$n(n-1)=32 \cdot 31$, поэтому $n=32$. 250. 1. За единицу измерения углов принимается *угловой градус* — $1/90$ часть прямого угла. За единицу измерения дуг окружности принимается *дуговой градус* — $1/360$ часть окружности. 2. *Радияном* (дуговым) называется дуга, длина которой равна длине ее радиуса (рис. 147). Дуга АВ называется *радианом*. Такая дуга служит единицей измерения дуг той же ок-

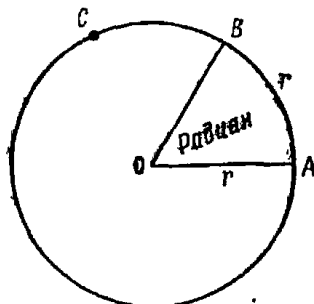


Рис. 147

ружности. Центральный $\widehat{AOB}$, опирающийся на дугу, называют тоже *радианом* (угловым). 3. *Радиянной мерой дуги* называется отношение длины этой

дуги к длине ее радиуса. Например, если длина дуги $AC=(l)=24$ (рис. 147), а радиус ее $R=12$ мм, то радианная мера дуги $\alpha=2$ рад. Следует отметить, что особого наименования для обозначения радиана нет. При чтении слово «радиан» произносится, а при написании опускается. Поэтому запись $\widehat{AC}=2$ следует читать $\widehat{AC}=2$ рад; *радианной мерой угла* называется отношение длины дуги, для которой этот угол является центральным, к длине радиуса. 4. Радианная мера

любой окружности равна 2π (так как $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$). 5. $1^\circ \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$

или $1 \text{ рад} \approx 57^\circ 17' 45'' \approx 57^\circ 18' \approx 57,3^\circ$. 6. $1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$, или

$1^\circ \approx 0,017 \text{ рад}$. 7. а) π (если дуга содержит 180° , то в то же время она содержит π (рад), т. е. в ней укладывается приблизительно

3,14 радиуса); б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) 7π . 8. а) 270° ; б) 150° ; в) 144° .

9. Угол, равный 3 рад, — тупой; углы, равные 4 и 5 рад, больше развернутого. 251. 1. Положительным считается направление поворота против часовой стрелки, а противоположное направление (по часовой стрелке) считается отрицательным. 2. Любой поворот может быть задан указанием его центра и угла поворота α , лежащего в пределах

$-180^\circ < \alpha < 180^\circ$. Поворот с центром O на угол α обозначается R_O^α ; если центр поворота O постояен, то пишут просто R^α . Один и

тот же поворот может быть записан различными способами, ибо поворот на угол α совпадает с поворотом на угол $\alpha + 360^\circ n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Например, один и тот же поворот на угол $\alpha = 30^\circ$ можно получить в результате вращения на угол $\alpha = 30^\circ + 360^\circ n$. В общем виде это

можно записать так: $R^\alpha = R^{\alpha + 360^\circ n}$, или в радианной мере $R^\alpha = R^{\alpha + 2\pi n}$. 3. $-900^\circ = -5\pi$. 4. $810^\circ = 4,5\pi$. 5. а) $R^{390^\circ} =$

$= R^{360^\circ + 30^\circ} = R^{30^\circ}$; б) $R^{-750^\circ} = R^{-750^\circ + 360^\circ \cdot 2} = R^{-30^\circ}$;

в) $R^{2,5\pi} = R^{0,5\pi + 2\pi} = R^{0,5\pi}$; г) $R^{\frac{14\pi}{3}} = R^{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 2} = R^{\frac{2\pi}{3}}$. 252. 1. Длина

дуги в 1 рад равна радиусу r , поэтому длина дуги в α (рад) $l = \alpha r$.

2. $S_{\text{сек}} = l \cdot \frac{r}{2} = \alpha r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2} \alpha$. 3. Радианная величина этой дуги равна

$\frac{5\pi}{6}$, длина ее $l = 3 \cdot \frac{5\pi}{6} = 2,5\pi \text{ м}$. 4. $S_{\text{сект}} = \frac{6^2}{2} \cdot \frac{5}{3} \pi = 30\pi \text{ см}^2$.

253. 1. Так как любому углу поворота α (поворота на α (рад)) соответствует одна и только одна точка P_α . 2. Область определения

функций синуса и косинуса есть множество всех действительных чисел. Множеством значений этих функций является отрезок $[-1; 1]$, ибо

координаты точек единичной окружности не превышают единицы. Область определения тангенса состоит из всех действительных чисел,

кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, так как при этих значениях α

$\cos \alpha$ равен нулю. Множеством значений функций тангенса является множество всех действительных чисел. 254. 1. Нет, так как $2^{1/2} =$

$= \sqrt{2} > 1$; 2) да; 3) да; 4) нет, так как $10^{\lg 2} = 2$; 5) нет, $\frac{\pi}{3} > 1$.

255. 1) $-1 \leq \sin x \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на 3;

$-3 \leq 3 \sin x \leq 3$, прибавив по 2, получим $-1 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5$;

2) $-1 \leq \cos x \leq 1$, $(-1)(-2) > -2 \cos x > 1 \cdot (-2)$, $2 > -2 \cos x > -2$,

или $-2 \leq -2 \cos x \leq 2$; 3) $5^{-1} < 5^{\sin x} \leq 5^1$, $\frac{1}{5} < 5^{\sin x} \leq 5$;

4) $3 \leq 3^2 + \cos x \leq 27$; 5) $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$; $0 \leq \log_3 (\sin x + 2) \leq 1$;

6) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin (x + 45^\circ) - \sqrt{2} < \sqrt{2} \sin (x + 45^\circ) < \sqrt{2}$.

256. 1. Ординаты точек I и II четвертей положительны. 2. Абсциссы точек II четверти отрицательны. 3. а) В I и III; б) в I и IV; в) в I и II. 4. Нет, так как синус как острого, так и тупого угла положителен. Тангенс и косинус тупого угла треугольника могут быть отрицательными. 257. 1) Плюс; 2) минус; 3) плюс.

258. 1) По условию, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, тогда $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$, т. е. $\frac{\alpha}{2}$

оканчивается во II четверти, следовательно, $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < 1$;

2) $\frac{\alpha}{4}$ — число (угол) I четверти, $0 < \cos \frac{\alpha}{4} < 1$; 3) $\lg \frac{\alpha}{2} < 0$;

4) $\frac{2}{3}\alpha$ — число (угол) II четверти, $-1 < \cos \frac{2}{3}\alpha < 0$.

259. 1) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$. 260. 1) $a+b$; 2) $2a$. 261. Наименьший

положительный период синуса и косинуса $T=2\pi$ (если угол задан в градусной мере: $T=360^\circ$). Для функций тангенс и котангенс наименьшим положительным периодом является число π (180°). Это можно

записать следующими равенствами: $\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin \alpha$; $\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos \alpha$; $\lg(\alpha \pm \pi) = \lg \alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$. 262. 1) $\sin 810^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$, $\cos 1440^\circ = \cos(360^\circ \cdot 4 + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1$,

$\operatorname{tg} 600^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 3 + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 1170^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 6 + 90^\circ) = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0$. Данное выражение равно $2 + \sqrt{3}$; 2) $\sin^2\left(2\pi \cdot 4 + \frac{\pi}{6}\right) +$

$+\cos^2\left(2\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 +$

$+\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = 3,5$. 263. 1) $T = \frac{2\pi}{k}$. Докажем это. Если период

данной функции T , то должно выполняться равенство $\sin(k(x+T)) = \sin kx$, откуда $\sin(kx + kT) - \sin kx = 0$. Преобразуем это выражение

в произведение: $2 \sin \frac{kT}{2} \cos\left(kx + \frac{kT}{2}\right) = 0$. Здесь $T = \text{const}$, поэтому

второй сомножитель $\cos\left(kx + \frac{kT}{2}\right) \neq 0$, например если $x = -\frac{T}{2}$, то

$\cos\left(-\frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}\right) = 1$, значит, при произвольном x это равенство

справедливо лишь, если $\sin \frac{kT}{2} = 0$. Отсюда $\frac{kT}{2} = n\pi$; при $n=1$

получаем, что период (наименьший) данной функции $T = \frac{2\pi}{k}$;

2) $T = \frac{2\pi}{m}$; 3) $T = \frac{\pi}{n}$; 4) $T = 2\pi:2 = \pi$; 5) $T = 2\pi:3 = \frac{2}{3}\pi$; 6) $T = \frac{\pi}{4}$;

7) $T = 2\pi:\frac{1}{2} = 4\pi$; 8) $T = 2\pi:\frac{2}{3} = 3\pi$; 9) $T = \pi:\frac{1}{3} = 3\pi$. 264. $\cos(-x) =$

$\cos x$, поэтому $\cos x$ — функция четная; $\sin(-x) = -\sin x$; $\operatorname{tg}(-x) =$

$= -\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, следовательно, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ —

решетные функции. 265. 1) $(-1) + (-1) - (-1/2)^2 + (1/2)^2 = -2$; 2) от прибавления к углу периода значение функции не изменяется, поэтому $\sin(-330^\circ) = \sin(-330^\circ + 360^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$, $\cos(-420^\circ) = \cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = 1/2$; $\lg(-120^\circ) = \lg(-120^\circ + 180^\circ) = \lg 60^\circ = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}(-300^\circ) = \operatorname{ctg}(-300^\circ + 180^\circ \cdot 2) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}/3$. Данное выражение равно $1 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$. 3) $\cos(-2\frac{1}{3}\pi + 2\pi) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

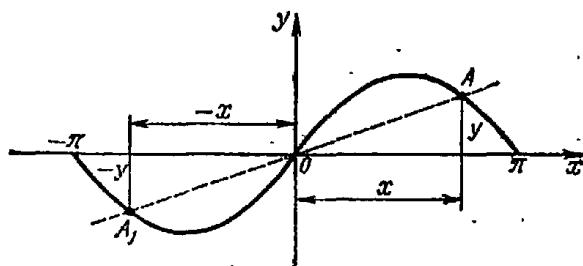


Рис. 148

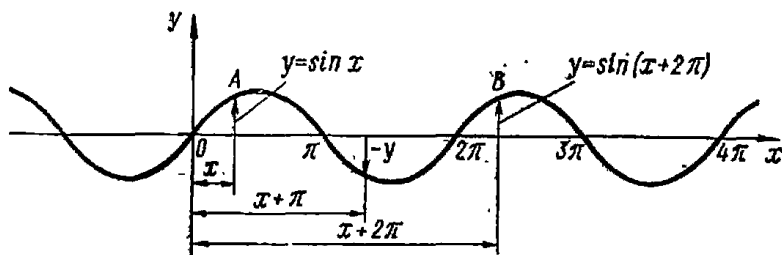


Рис. 149

$$\sin(-8,5\pi + 8\pi) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \operatorname{ctg}\left(-2\frac{5}{6}\pi + 3\pi\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg}\left(-5\frac{1}{3}\pi + 5\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \text{ Данное выражение равно } -1/2.$$

$$266. 1) f(-x) = \frac{(-x)^2 + \cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{x^2 + \cos x}{-\sin x} = -\frac{x^2 + \cos x}{\sin x} = -f(x).$$

Данная функция является нечетной, ибо при изменении знака аргумента значения функции изменились на противоположные;

$$2) f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x) - \text{четная}; \quad 3) f(-x) = -\sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x) - \text{нечетная};$$

$$4) f(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm f(x). \text{ Функция не является ни четной, ни нечетной.}$$

$$267. 1) 3 \cos x - 2 \sin x; \quad 2) \sin x + x \cos x; \quad 3) \operatorname{ctg}' x = -\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$268. 1. f'(x) = 2 - \sin x; \text{ так как } |\sin x| < 1, \text{ то } f'(x) > 0. \quad 2. \varphi'(x) = 1 - \sin x; \quad \varphi'(x) = 0, \text{ если } \sin x = 1 \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$269. 1) \text{ Область определения функции — множество всех действительных чисел } R; \quad 2) \text{ множество значений — множество всех чисел, заключенных в отрезке от } -1 \text{ до } 1, \text{ т. е. оно определяется неравенством } -1 < \sin x < 1; \quad 3) \text{ функция является}$$

нечетной: $\sin(-x) = -\sin(x)$. Точки синусоиды A и A_1 (рис. 148) с абсциссами x и $-x$ симметричны относительно начала координат, ординаты этих точек отличаются только знаками; 4) функция периодична с периодом $T=2\pi$. Точки A и B (рис. 149), абсциссы которых x и $x+2\pi$, имеют одинаковые ординаты $y=\sin x$ и $y=\sin(x+2\pi)$; 5) функция обращается в ноль ($\sin x=0$), если $x=\pi k, k \in \mathbb{Z}$. График функции пересекает ось Ox , в точках абсциссы которых $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, т. е. при $x=\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 6) в интервалах $0 < x < \pi, 2\pi < x < 3\pi, \dots, 2\pi k < x < \pi(2k+1)$ функция положительна, а в интервалах $\pi(2k+1) < x < 2\pi(2k+1)$ отрицательна; 7) наибольшее значение функции равно 1 ($\sin x=1$, если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$). В точках, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots$, ординаты равны 1. Наименьшее значение функция равно -1 ($\sin x=-1$, если $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$), в точках, абсциссы которых $-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi,$

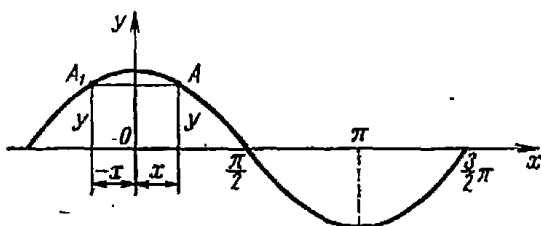


Рис. 150

$\frac{7}{2}\pi, \dots$, ординаты равны -1 . 270. а): 1) Область определения функции $y=\cos x$ — множество всех действительных чисел; 2) множество значений — множество чисел, удовлетворяющих неравенству $-1 \leq \cos x \leq 1$; 3) функция четная: $\cos(-x)=\cos x$. Точки A и A_1 (рис. 150) с абсциссами x и $-x$ симметричны относительно оси Oy , ординаты этих точек равны; 4) функция периодична с периодом $T=2\pi$; б) функция обращается в ноль ($\cos x=0$) при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\frac{3\pi}{2}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 6) функция положительна в интервалах, определяемых равенствами $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 7) $\cos x=1$ при $x=2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\cos x=-1$ при $x=\pi+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 6): 1) тангенс определен лишь для тех углов, косинусы которых отличны от нуля, поэтому область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, или $x=\frac{3\pi}{2}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) множество значений функции — совокупность всех действительных чисел; 3) функция нечетна: $\lg(-x)=-\lg x$ — тангенсоида симметрична относительно начала координат; 4) функция периодична, период ее

$T=\pi$; 5) $\lg x=0$ при $x=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) функция положительна в интервалах, определяемых равенствами $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, а отрицательна, если $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 7) наибольших и наименьших значений функция не имеет. 271. 1) Функция $y=\lg z$ имеет определенное значение лишь при $z > 0$, поэтому должно выполняться

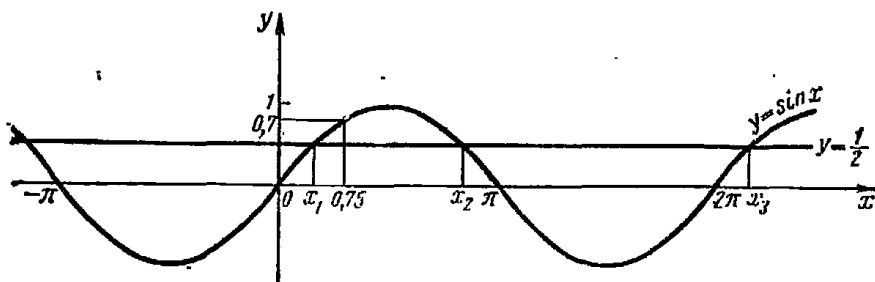


Рис. 151

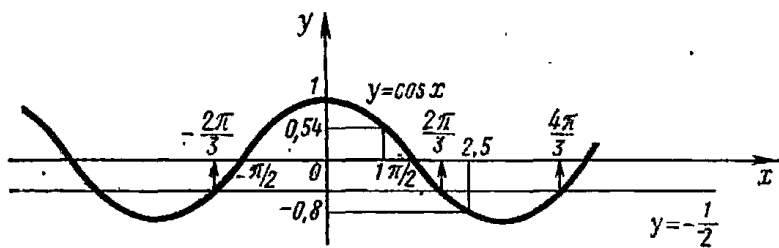


Рис. 152

неравенство $\cos x > 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$;

2) $x \neq \frac{\pi}{2} (2n+1)$ и $x \neq \pi n$, что можно записать короче: $x \neq \frac{\pi}{2} k$; $k \in \mathbb{Z}$; 3) одновременно должны выполняться неравенства $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, это будет лишь тогда, когда $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) должно быть $\cos x - 1 > 0$ или $\cos x > 1$; но $-1 < \cos x < 1$, следовательно, $\cos x = 1$, откуда область определения данной функции $x = 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

272. 1. а) Возрастает от -1 до 1 ; б) убывает от 1 до -1 . 2. Надо найти абсциссы точек пересечения синусоиды и прямой $y = \frac{1}{2}$ (рис. 151); $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi$, $x_3 = \frac{13}{6}\pi$, ... ,

$x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$. 3. а) Надо отметить на оси абсцисс точку $x = 0.75$, ордината этой точки $y = \sin 0.75 \approx 0.7$ (см. рис. 151);

б) $\sin 1 \approx 0.8$; в) $\sin (-2.5) \approx -0.6$. 273. 1. а) Убывает от 1 до -1 ;

б) возрастает от -1 до 1 . 2. а) $\cos 1 \approx 0.54$ (рис. 152); б) $\cos 2.5 \approx$

$\approx -0,8$; в) $\cos(-3) \approx -1$ 3. $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$, ..., $x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 274. 1) Все значения функции $y = 2 \sin x$ в два раза больше соответствующих значений $y = \sin x$, поэтому кривая

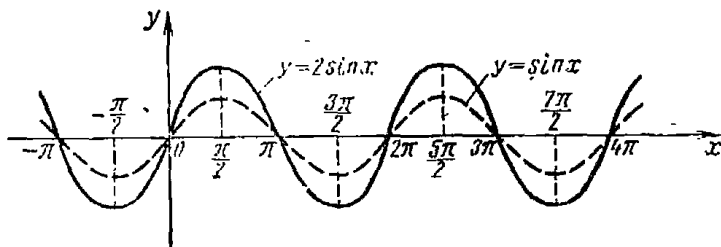


Рис. 153

$y = 2 \sin x$ получается растяжением синусоиды $y = \sin x$ вдвое в вертикальном направлении (рис. 153); 2) при любом значении аргумента x ордината графика функции $y = -\sin x$ равна по величине и противоположна по знаку ординате синусоиды $y = \sin x$ (рис. 153); 3) период

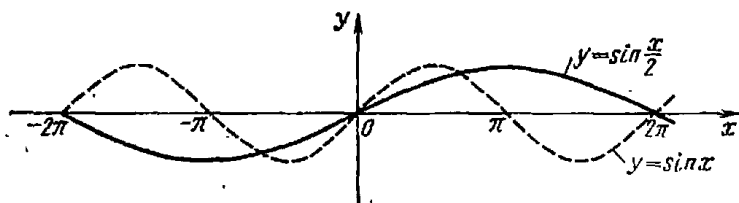


Рис. 154

этой функции $T = 4\pi$. График функции $y = \sin \frac{x}{2}$ пересекает ось Ox в точках, где $\frac{x}{2} = \pi k$, т. е. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

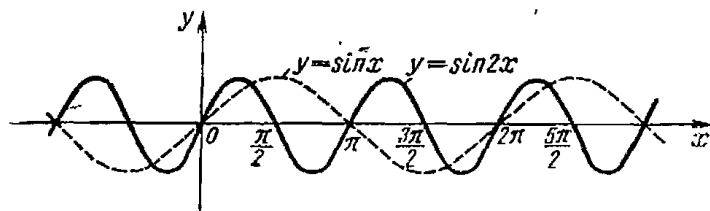


Рис. 155

Он получается растяжением синусоиды $y = \sin x$ в два раза вдоль оси Ox (рис. 154); 4) период этой функции $T = \pi$, график функции получается путем сжатия синусоиды $y = \sin x$ вдвое вдоль оси Ox (рис. 155); 5) для значений x , где $\sin x > 0$, графики функций $y = |\sin x|$ и $y = \sin x$ совпадают; для значений x , где $\sin x < 0$, график функции $y = |\sin x|$ симметричен графику $y = \sin x$ относительно оси Ox (рис. 156).

6) график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ получается путем сдвига синусоиды $y = \sin x$ по оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{4}$ (рис. 157, а); вместо перенесения всей кривой на $\frac{\pi}{4}$ влево проще сдвинуть ось O_1y_1 на $\frac{\pi}{4}$

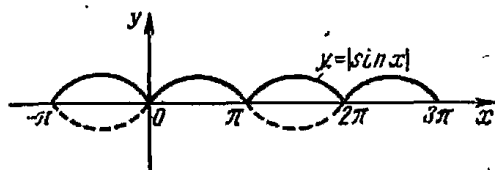


Рис. 156

вправо, изобразив первоначальное положение этой оси пунктиром (рис. 157, б). 275. 3) График функции $y = \cos |x|$ ничем не отличается от графика функции $y = \cos x$, так как $\cos(-x) = \cos x$; 4) график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ получается путем сдвига косинусоиды по

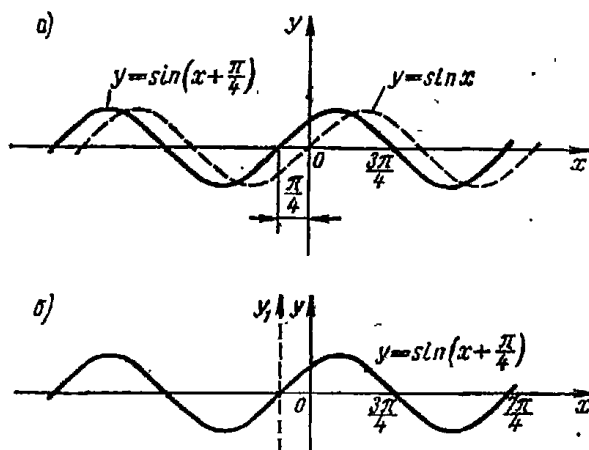


Рис. 157

оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{3}$ или параллельным переносом оси O_1y_1 влево на $\frac{\pi}{3}$ (рис. 158); 5) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, для получения графика функции $y = \cos x$ можно график функции $y = \sin x$ сдвинуть влево, в направлении оси Ox на $\frac{\pi}{2}$, или на рис. 159, а сдвинуть ось O_1y_1 вправо на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 159, а, б). 276. 1. Функция $\lg x$ возрастает от $-\infty$ до ∞ ; причем если x приближается к $\pi/2$, оставаясь меньше

$\pi/2$, то $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$; если же приближается к $\pi/2$, оставаясь больше $\pi/2$, то $\operatorname{tg} x \rightarrow -\infty$. 2. $\operatorname{tg} 1 \approx 1,6$; $\operatorname{tg}(-2) \approx 2,2$. 277. 1) Если $\operatorname{tg} x > 0$, то график функции $y = |\operatorname{tg} x|$ совпадает с графиком $y = \operatorname{tg} x$. Если $\operatorname{tg} x < 0$, то ординаты графика $y = |\operatorname{tg} x|$ равны соответствующим ординатам графика $y = \operatorname{tg} x$, но противоположны по знаку (рис. 160);

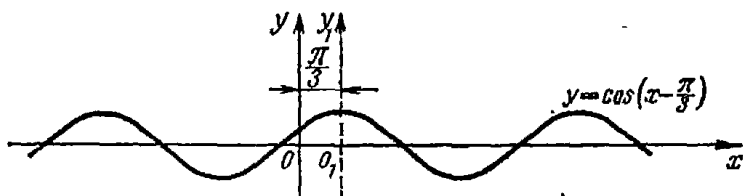


Рис. 158

2) при $x > 0$ $y = \operatorname{tg} x$, следовательно, при положительных значениях x график тот же, что и график функции $y = \operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{tg}|-x| = -\operatorname{tg} x$, то функция четная, левая часть графика симметрична правой

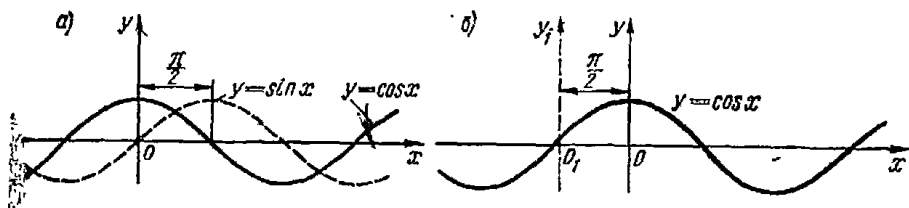


Рис. 159

относительно оси Oy (рис. 161); 3) части графика функции $y = \operatorname{tg} x$, расположенные выше оси Ox , зеркально отразить ниже этой оси, а

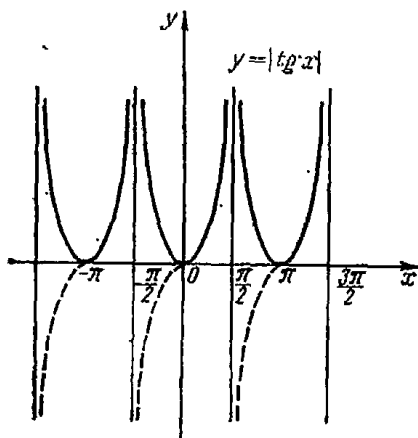


Рис. 160

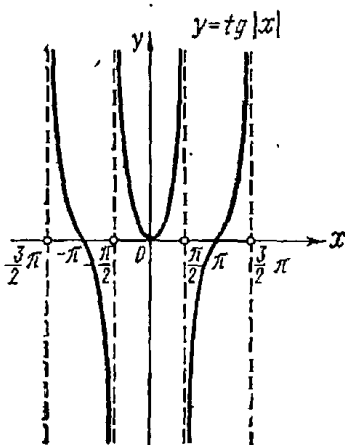


Рис. 161

расположенные ниже оси Ox зеркально отразить выше этой оси. 278. 1) Уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Имеем: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $f'(x) = 2 \cos x$, $f'(0) = 2$; $y - 0 = 2(x - 0)$, $y = 2x$; 2) $y_0 = 3$.

$$x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi'(x) = \frac{3}{\cos^3 x}, \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\cos^3 \frac{\pi}{4}} = 6; \quad y - 3 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y = 6x + \left(3 - \frac{3}{2}\pi\right). \quad 279. \text{ Формула (2) теряет смысл при } \alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$k \in Z$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$; при этих значениях $\alpha \cos \alpha = 0$;

формула (3) — при $\alpha = \pi k$, $k \in Z$ (при этих значениях $\alpha \sin \alpha = 0$);

(4) — при $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$; (5) — при $\alpha = \pi k$, $k \in Z$; (6) — при

$\alpha = \pi k$, $k \in Z$; (7) — при $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$; (8) — при $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

а также при $\alpha = \pi k$, $k \in Z$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. 280. 1) $\cos \alpha = 0,8$,

$\lg \alpha = 0,75$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{1}{3}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ (знак минус взят потому, что

α оканчивается в IV четверти, где синус отрицателен), $\lg \alpha = -5/12$,

$\operatorname{ctg} \alpha = -2,4$. 3) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24}$, $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$ (во II четверти косинус

отрицателен), $\sin \alpha = \lg \alpha \cos \alpha = 0,96$; * 4) $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - (-0,8)^2} =$

$= \pm 0,6$ (двойной знак взят потому, что α может оканчиваться как

во II, так и в III четверти), $\operatorname{ctg} \alpha = \pm 1\frac{1}{3}$, $\lg \alpha = \pm 0,75$;

$$5) \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}, \quad \lg \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

З а м е ч а н и е. При вычислении тригонометрических функций по одной заданной можно воспользоваться прямоугольным треугольником. Например, при решении 5) можно считать a катетом, противолежащим углу α , а c — гипотенузой. Тогда, по теореме Пифагора, прилежащий катет будет равен $\sqrt{c^2 - a^2}$. Затем воспользоваться определениями тригонометрических функций острого угла. Знак ставится в зависимости от того, в какой четверти находится данный угол.

$$281. 1) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \lg^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z; \quad 2) \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k,$$

$$k \in Z; \quad 3) \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1. \quad \text{З а м е ч а -}$$

н и е. Если заменить $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ по формулам тригонометрических функций половинного аргумента, то преобразования значительно усложнятся; 4) $\left(\frac{\cos x \sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x \cos x}{\sin x}\right)^2 = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.$

* Для нахождения $\sin \alpha$ можно применить и формулу (1), но это потребует более сложных вычислений (извлечения корня).

282. 1) У к а з а н и е. В данном тождестве не имеется других функций, кроме тангенса и котангенса. В подобных случаях целесообразно заменить $\operatorname{ctg} \alpha$ на $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$; 2) здесь кроме тангенса и котангенса входит еще и косинус, поэтому тангенс и котангенс выразить через синус и косинус:

$$\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x \right) \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = 1,$$

или

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$\left(x \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \right)$; 3) у к а з а н и е. Вторая дробь

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

283.* 1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha =$
 $= \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$; 2) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, откуда $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$;

3) $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

284. 1. а) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 25$, или $\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 25$, а $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$, поэтому $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 23$; б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \times$
 $\times (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$, но $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$, а $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 23$,
 поэтому $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha = 5 \cdot (23 - 1) = 110$. 2. а) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = a^2$, или
 $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = a^2$, откуда $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$;

б) $\frac{a(3 - a^2)}{2}$; в) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha -$
 $- 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^2 =$
 $= \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}$. 285. 1) 0,6. У к а з а н и е. Если разделить числитель

и знаменатель на $\cos \alpha \neq 0$, то $\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$; 2) у к а з а

н и е. Разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 \alpha$. Данное выражение

* Надо помнить, что при некоторых значениях переменной α написанные формулы теряют смысл (см. 279).

равно $\frac{2}{5}$. 286. 1) После преобразований получим $y=2$. График — прямая, параллельная оси Ox ; 2) график данной функции — прямая $y=4$ с исключенными («выколотыми») точками, соответствующими значениям $x=\frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; 3) графиком данной функции является график $y=|\sin x|$ (см. рис. 156) с исключенными точками, абсциссы которых $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, где $k \in Z$; 4) график $y=|\cos x|$ с исключенными точками, абсциссы которых $x=\pi k$, $k \in Z$. 287. 1) $\lg 27^\circ \lg 63^\circ = \lg 27^\circ \lg (90^\circ - 27^\circ) = \lg 27^\circ \operatorname{ctg} 27^\circ = 1$; 2) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1$; 3) $\cos^2 (60^\circ - \alpha) = \sin^2 [90^\circ - (60^\circ - \alpha)] = \sin^2 (30^\circ + \alpha)$; данное выражение равно 1; 5) $\lg (\operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ) = \lg (\lg 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ) = \lg 1 = 0$. 288. 1. $\lg (90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = 1/\lg \alpha = 1/2$. 2. 1. 3. $\sin (90^\circ - x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$. 289. 1) $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$; 2) $\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$; 3) $\operatorname{tg} 315^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,577$; 5) сначала исключим период данной функции делением 1225° на 360° , тогда $\sin 1225^\circ = \sin (360^\circ \cdot 3 + 145^\circ) = \sin 145^\circ = \sin (180^\circ - 35^\circ) = \sin 35^\circ \approx 0,574$; 6) от прибавления к углу периода $T=180^\circ$ значение тангенса не изменится, поэтому $\operatorname{tg} (-135^\circ) = \operatorname{tg} (-135^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$; 7) $\sin 2 = \sin (\pi - 2) \approx \sin 1,14$; 8) $\cos 5,23 = \cos (2\pi - 5,23) \approx \cos 1,05 \approx 0,4976^*$. 290. 1) $\cos (360^\circ \times 2 + 0^\circ) \sin (360^\circ \cdot 2 + 90^\circ) + \operatorname{ctg} (180^\circ \cdot 3 + 45^\circ) \operatorname{tg} (180^\circ \cdot 10 + 45^\circ) + \sin (360^\circ - 45^\circ) \cos (360^\circ + 45^\circ) = 1,5$; 3) $\operatorname{tg} (\pi - \alpha) \cos (\pi - \alpha) = \sin (\pi - \alpha)$, $\frac{\sin (\pi - \alpha)}{\sin \left(\frac{3}{2}\pi + \alpha \right)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\sin \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{5} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) - \cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} = 0$; 5) указание. $\cos \frac{47\pi}{30} = \cos \left(\pi + \frac{17\pi}{30} \right) = -\cos \frac{17\pi}{30}$. 291. 1) $A+B+C=180^\circ$, откуда $A+B=180^\circ - C$, $\sin (A+B) = \sin (180^\circ - C) = \sin C$; 3) $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$. 293. 1) $\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; 2) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ + 30^\circ) =$

* См. таблицу XII В. М. Брадаса.

$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= 2 + \sqrt{3} \text{ или } \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}. \quad 294. \text{ 1) Применяя}$$

формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ в обратном порядке $\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ = \sin(18^\circ + 12^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

$$2) (\cos(18^\circ + 7^\circ))^2 + (\sin(15^\circ + 10^\circ))^2 = \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ = 1,$$

$$3) \cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \cos 2\alpha; \quad 4) \sin(1 + 2,14) + \cos(1 + 0,57) =$$

$$= \sin 3,14 + \cos 1,57 \approx \sin \pi + \cos \frac{\pi}{2} \approx 0; \quad 5) \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 6) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right) =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad 295. \quad 1) \sin \alpha = -\sqrt{1 - (-8/17)^2} = -15/17 \text{ (знак}$$

минус взят потому, что α находится в третьей четверти); $\sin \beta = -4/5$;

$$\sin(\alpha + \beta) = \left(-\frac{15}{17}\right) \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{13}{85}; \quad 2) \cos x = \frac{3}{5},$$

$$\sin y = -\frac{24}{25}, \cos y = -\frac{7}{25}; \cos(x - y) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) =$$

$$= \frac{75}{125} = \frac{3}{5}; \quad 3) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{4 - 3}{1 + 4 \cdot 3} = \frac{1}{13}; \quad 4) \cos \alpha = 0,6, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7; \quad 5) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}[45^\circ + (15^\circ - \alpha)] =$$

$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}(15^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg}(15^\circ - \alpha)} = \frac{1 + 2}{1 - 1 \cdot 2} = -3. \quad 296. \quad 1) \sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos 2\alpha =$$

$$\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\sin \alpha} = 1$$

$$(\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}); \quad 2) 1 + \frac{\sin 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \cos 4\alpha + \sin 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha} =$$

$$\frac{\cos(2\alpha - 4\alpha)}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha} = \frac{1}{\cos 4\alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{8}(2k+1), k \in \mathbb{Z} \right); \quad 3) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \left(\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right). \quad 297. \quad 1) \text{ Разложив данное выра-$$

жение на множители по формуле разности квадратов, получим $(\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha)(\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha) = \sin 3\alpha \sin \alpha$;

$$2) \text{ у к а з а н н о. } \cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha); \quad 3) \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 50^\circ - 1} =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 50^\circ} = -\operatorname{tg}(45^\circ + 50^\circ) = -\operatorname{tg} 95^\circ = \operatorname{ctg} 5^\circ; \quad 4) \text{ у к а з а -}$$

ние. Заменить $\operatorname{ctg} 60^\circ$ на $\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$, а затем найти сумму $\cos 75^\circ + \frac{\cos 60^\circ \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}$. 298. 1. $x+y=a(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))=2a \sin \alpha \cos \beta$.

2. $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} : (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, но, по условию, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha} =$

$= \frac{1}{2}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$). 299. 1) $2 \sin \alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)$, но если $0 < \alpha < \pi/2$, то $2 \sin \alpha > 0$ и $1 - \cos \alpha > 0$, поэтому и $2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) > 0$, а это означает, что $2 \sin \alpha > \sin 2\alpha$, или $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$; если $\alpha = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); эти значения можно получить, решив уравнение $2 \sin \alpha - \sin 2\alpha = 0$ (см. 322. 3)); 2) $2 \cos \alpha - \cos 2\alpha = 2 \cos \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1) = 2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha) + 1$, но при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $2 \cos \alpha > 0$, $1 - \cos \alpha > 0$, следовательно, $2 \cos \alpha \times$

$\times (1 - \cos \alpha) + 1 > 0$, поэтому $2 \cos \alpha > \cos 2\alpha$. 300. 1) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 3) $\sin 5\alpha = 2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2}$;

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$; 5) $\sin(90^\circ - \alpha) = 2 \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 7) $\operatorname{ctg} 40^\circ = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 20^\circ}{2 \operatorname{tg} 20^\circ}$. 301. 1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$

$= \pm 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ (двойной знак поставлен, потому что неизвестно, в какой четверти находится 2α ; 2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$. 302. 1) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$,

отсюда $\cos 2\alpha = 2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4} (1 - \sqrt{5})$; 2) $\sin 4x = \pm 2 \sin 2x \sqrt{1 - \sin^2 2x} = \pm 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \pm \frac{120}{169}$; 3) $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{7}$, $\operatorname{tg} 6x =$

$= \frac{2 \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg}^2 3x} = \frac{2 \cdot \frac{2}{7}}{1 - \frac{4}{49}} = \frac{28}{45}$. 303. 1) $\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$;

2) $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$;

$$4) \sin 20^\circ \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2} = \frac{1}{2} \sin 40^\circ;$$

$$5) \frac{1}{2} \sin 2\alpha; \quad 6) \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{(\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ)(\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ)} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\cos 80^\circ} = 2 \sin 80^\circ = 2 \cos 10^\circ; \quad 7) 8(2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) \cos 20^\circ \times$$

$$\times \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ = \sin 20^\circ; \quad 8) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{2 \operatorname{tg} 15^\circ} = 1: \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} =$$

$$= 1: \operatorname{tg}(2 \cdot 15^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}. \quad 304. \quad 1) \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4;$$

$$2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} - \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}} = 2;$$

$$4) \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin(3\alpha - \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$(\alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}); \quad 5) \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$6) \cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos^3 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad 305. \text{ Знак ставится в зависимости от того, в какой четверти оканчивается } \alpha/2$$

Если, например, $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, то в формулах (2) и (3) перед радикалом надо взять знак минус, так как косинусы и тангенсы аргументов, оканчивающихся во II четверти, отрицательны.

$$306. \quad 1) \sin 3\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 6\alpha}{2}}; \quad 2) \sin(45^\circ - \varphi) =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(90^\circ - 2\varphi)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin 2\varphi}{2}}; \quad 3) \sin^2 \alpha =$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad 4) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad 307. \quad 1) \cos 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}};$$

$$2) \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (\text{см. } 293. \quad 2)$$

$$308. 1) 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = 0,3\sqrt{10};$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -0,1\sqrt{10}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -0,3\sqrt{10} : (-0,1\sqrt{10}) = -3;$$

$$2) \cos \alpha = -\frac{8}{17}; \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{34}\sqrt{34}.$$

309. 1) Чтобы можно было применить одну из формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, необходимо иметь алгебраическую сумму одименных функций, поэтому заменим $\cos 50^\circ$ на $\sin 40^\circ$. тогда $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin \frac{20^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{20^\circ - 40^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos (-10^\circ) = \cos 10^\circ$;

этот же результат можно получить, если заменить $\sin 20^\circ$ на $\cos 70^\circ$;

$$2) \sin 56^\circ - \cos 56^\circ = \sin 56^\circ - \sin 34^\circ = 2 \sin 11^\circ \cos 45^\circ = \sqrt{2} \sin 11^\circ;$$

$$3) \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{10} =$$

$$= -2 \sin \frac{3\pi}{20} \sin \frac{\pi}{20}; \quad 4) \text{ I способ: } \sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin (90^\circ - \alpha) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 90^\circ + \alpha}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos (\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2} \times$$

$$\times \sin (45^\circ + \alpha), \quad \text{II способ: } \sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \operatorname{tg} 45^\circ \cos \alpha = \sin \alpha + \frac{\sin 45^\circ \cos \alpha}{\cos 45^\circ} = \frac{\sin \alpha \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos \alpha}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \sin (45^\circ + \alpha);$$

$$5) \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} (\cos 90^\circ + \cos 10^\circ)} =$$

$$= \frac{2}{\cos 10^\circ}; \quad 6) \operatorname{tg} 22^\circ 30' - \operatorname{ctg} 22^\circ 30' = \operatorname{tg} 22^\circ 30' - \operatorname{tg} 67^\circ 30' =$$

$$= \frac{\sin (-45^\circ)}{\cos 22^\circ 30' \cos 67^\circ 30'} = \frac{-\sin 45^\circ}{\frac{1}{2} (\cos 90^\circ + \cos 45^\circ)} = -2; \quad 7) \sin^2 \alpha -$$

$$- \sin^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} = \sin (\alpha + \beta) \times$$

$\times \sin (\alpha - \beta)$. З а м е ч а н и е. Если применить формулу разности квадратов, то $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) =$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \times$$

$$\times \left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta), \text{ т. е. преобразования}$$

$$\text{усложняются; } 8) \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{2} = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha); \quad 9) \quad \sin^2(\alpha - 15^\circ) - \\ - \cos^2(\alpha + 15^\circ) = \frac{1 - \cos(2\alpha - 30^\circ)}{2} - \frac{1 + \cos(2\alpha + 30^\circ)}{2} = \\ = -\frac{\cos(2\alpha - 30^\circ) + \cos(2\alpha + 30^\circ)}{2} = -\frac{2 \cos 2\alpha \cos 30^\circ}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha;$$

$$10) \quad 1 + \sin \alpha + \cos \alpha = (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ = 2 \cos \frac{\alpha}{2} 2 \sin 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

11) надо суммировать три тригонометрические функции, при этом углы надо комбинировать так, чтобы сумма (полусумма) или разность (полуразность) двух выбранных углов равнялась третьему углу:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = (\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha = \\ = 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 2\alpha (\cos \alpha + \cos 60^\circ) = 4 \sin 2\alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right); \quad 12) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \\ + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \quad 13) \quad \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha (\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 14) \quad 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$15) \quad 1 + \sin 20^\circ = 1 + \cos 70^\circ = 2 \cos^2 35^\circ; \quad 16) \quad 1 - \cos(90^\circ - \alpha) = \\ = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right). \quad 310. \quad 1) \quad 0,5 + \sin \alpha = \sin 30^\circ + \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 2) \quad \text{в левых частях формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение (см. с. 69) коэффициенты при тригонометрических функциях равны единице, в данном выражении коэффициент при } \sin \alpha \text{ равен 2. Вынесем его за скобку: } 1 - 2 \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2} \right); \quad 3) \quad \sqrt{3} + 2 \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos x \right) = \\ = 4 \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} \right); \quad 4) \quad 1 + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos x}; \quad 5) \quad \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1 = \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right); \quad 6) \quad 1 - 4 \cos^2 \alpha =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{4} - \cos^2 \alpha \right) = 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \alpha \right) = 4 \left(\frac{1 + \cos \frac{2}{3} \pi}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2}{3} \pi - \cos 2\alpha \right) = -4 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right); \quad 7) \quad \text{можно}$$

$$\text{заменить } \sqrt{3} \text{ на } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \text{ тогда } \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = \sin \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{3}} =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right). \quad 311. \quad 1) \quad 1 + \sin x = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \text{ затем применить}$$

$$\text{формулу } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 2) \quad (\sin 3\alpha + \sin 7\alpha) + \sin 10\alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 2\alpha +$$

$$+ 2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha = 2 \sin 5\alpha (\cos 2\alpha + \cos 5\alpha) = 4 \sin 5\alpha \cos \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2};$$

$$3) \quad \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha = (\cos \alpha + \cos 5\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha) =$$

$$= 2 \cos 3\alpha \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos 3\alpha \cos \alpha = 2 \cos 3\alpha (\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha) = 4 \cos 3\alpha \times$$

$$\times \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad 312. \quad \text{Потому что синус на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

возрастает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Функция, обратная функции $y = \sin x$, называется арксинусом. 313. Потому что функция косинус на отрезке $[0; \pi]$ убывает и принимает все значения на отрезке $[-1; 1]$. Обратная функция по отношению к косинусу на отрезке $[0; \pi]$ называется арккосинусом. 314. Потому что на проме-

жутке $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ тангенс возрастает и принимает все числовые

значения из $\mathbb{R}$. Обратная функция по отношению к тангенсу на промежутке $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ называется арктангенсом. 315. 1) $D(f) =$

$$= [-1; 1], \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \quad 2) \quad D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = [0; \pi];$$

$$3) \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]. \quad 316. \quad 1) \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{и } \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \quad 2) \quad -\frac{\pi}{2}; \quad 3) \quad \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

$\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$; 4) $\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{6}\pi$, так как $\cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{5}{6}\pi \in [0; \pi]$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 7) $\frac{\pi}{6}$; 8) данное выражение лишено смысла, так как число, стоящее под знаком арксинуса, должно быть не более 1.

817. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}^*$. Если, например, значения $k=0, 1, 2, 3, \dots$, то $x_0 = (-1)^0 \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$; $x_1 = (-1)^1 \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 1 = \frac{2}{3}\pi$; $x_2 = \frac{7}{3}\pi$; $x_3 = \frac{8}{3}\pi$ и т. д.; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$; 3) $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{2}k$; 4) $3x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$; 5) $x = 2\pi k$;

6) $-\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$, умножив обе части уравнения на -1 , получим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi k$; 7) $\emptyset$; 8) $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{7}{12}\pi + \pi k$. 318. 1) Решив квадратное уравнение относительно $\sin x$, получим $\sin x = \frac{1}{2}$, или

$\sin x = 1$, откуда $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\cos x = 3$ или $\cos x = 1$; но так как $\cos x$ не может быть равным трем, то осталось решить уравнение $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$; 3) $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = 3$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, или $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$. 319. 1) Заменив $\sin^2 x$ на

$1 - \cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\cos x$: $3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x)$, или $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$, откуда $\cos x = -2$, или $\cos x = \frac{1}{2}$, из последнего получаем $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 2) $2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$, $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$, откуда $\sin x = -1/2$ или $\sin x = 2$; из первого уравнения получаем $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, или $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$; 3) $\operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$; $\operatorname{tg}^2 x - 2 + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, откуда $\operatorname{tg}^2 x = 3$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$; 4) $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x$; $((1 - \sin^2 x) - \sin^2 x) \cdot 1 = \sin x$, $1 - 2 \sin^2 x = \sin x$, $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, откуда

* Всюду в дальнейшем для сокращения записи не будем писать, что $n, k=0; \pm 1; \pm 2, \dots$, т. е. $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x = -1 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2}, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ или } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

320. 1) $\cos x (\cos x - 1) = 0$; так как произведение равно нулю, если какой-нибудь из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла, то данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений (не систем!) $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x - 1 = 0. \end{cases}$ Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} (2k+1)$,

если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi k$. З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся ошибочно делят все члены данного уравнения на $\cos x$. Это приводит к потере множества решений уравнения $\cos x = 0$. Такое деление возможно лишь в однородных уравнениях (см. 321), где есть уверенность, что $\cos x$ не может равняться нулю; 2) $\sin 2x (2 - \sin 2x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$,

откуда $x = \frac{\pi}{2} k$, второй сомножитель ни при каких значениях x не может равняться нулю; 3) $\cos 4x (2 \sin 2x + 1) = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0$ или

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{8} (2k+1) \text{ или } x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k;$$

4) $2(1 - \sin^2 x) - \cos x (1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x \cos^2 x = 0$, $\cos^2 x (2 - \cos x) = 0$; так как $|\cos x| \leq 1$, то $2 - \cos x \neq 0$, откуда

$$\cos^2 x = 0, \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} (2k+1); 5) \sin x = 0 \text{ при } x = \pi k, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

при $x = 2\pi k$. Но при $x = \pi k \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен, поэтому решением

данного уравнения служат $x = 2\pi k$. 321. 1) Здесь $\cos x \neq 0$, ибо если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} (2k+1)$, при этих значениях x левая часть данного

уравнения равна 1 или $-1 \left(\sin \frac{\pi}{2} (2k+1) = \pm 1 \right)$, а правая равна нулю; поэтому, не опасаясь потери корней*, делим все члены данного уравнения на $\cos x$, тогда $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, следовательно,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k; 2) \cos 3x \neq 0, \text{ затем имеем } \operatorname{tg} 3x + 1 = 0, \text{ откуда } 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\text{следовательно, } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; 3) \cos 2x \neq 0, \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 3 = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}, 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; 4) \cos^2 x \neq 0; \text{ разделив}$$

все члены на $\cos^2 x$, получим $3 \operatorname{tg}^2 x = 1$, откуда $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/3$

$$\text{или } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3; \text{ окончательно } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k. \text{ З а м е ч а н и е. К}$$

такому же результату можно прийти, если заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$; 5) если заменить 1 на $\sin^2 x + \cos^2 x$, то получим однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение второй степени $3 \sin^2 x + \sin x \cos x -$

* Как известно, при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны те корни уравнения, при которых делитель обращается в ноль.

$-4 \cos^3 x = 0$, $\cos^3 x \neq 0$; далее, $3 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 4 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, или $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, или $x = -\arctg \frac{4}{3} + \pi k$. Ответ:

$$\left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k; x = -\arctg \frac{4}{3} + \pi k \right\}. \quad 322. 1) \text{ По формулам приведения}$$

приводим члены уравнения к аргументу x : $2 \cos^3 x - 3 \sin x = 0$, затем к одной функции путем замены $\cos^3 x$ на $1 - \sin^2 x$. Ответ:

$$\left\{ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right\}; 2) \text{ по формулам приведения получим } \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x -$$

$$-3 \operatorname{tg} x - 3 = 0, \text{ затем, разложив на множители способом группировки,}$$

$$\text{получим } (\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0. \text{ Ответ: } \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \right\};$$

3) $2 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$, $2 \sin x (\cos x - 1) = 0$, откуда $x = \pi k$, или $x = 2\pi k$. Все решения второй серии входят в число решений первой, поэтому окончательно ответ такой: $\{x = \pi k\}$; 4) $\cos^3 x - \sin^2 x = 2 \cos x$,

$$\text{откуда } 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ или } \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2};$$

так как $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$, то первое уравнение не имеет решений, из вто-

рого находим $x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 2\pi k$; 5) по формуле $\cos(\alpha + \beta) =$

$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ имеем $\cos(3x - x) = 0$, т. е. $\cos 2x = 0$. Ответ:

$$\left\{ x = \frac{\pi}{4} (2k + 1) \right\}. \quad 323. 1) \text{ Если заменить } \sqrt{3} \text{ на } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \text{ то } \sin x -$$

$$-\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = 2, \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{3}; \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1,$$

$$\text{откуда } x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \text{ Ответ: } x = \left\{ \frac{5}{6} \pi + 2\pi k \right\}; 2) \text{ 1 способ.}$$

Заменим 1 — коэффициент при $\sin x$ — на $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, тогда $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \sin x + \cos x = 1$,

$$\text{или } \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; x - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k. \text{ Ответ: } \left\{ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = 2\pi k \right\}.$$

II способ. Используем формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ и $1 - \cos x =$

$$= 2 \sin^2 \frac{x}{2}; 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ или } \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Затем $\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0$, откуда $\sin \frac{x}{2} = 0$, либо $\cos \frac{x}{2} =$

$$= \sin \frac{x}{2} = 0. \text{ Из первого уравнения } x = 2\pi k \text{ Далее решаем второе}$$

уравнение. Разделив обе части этого однородного уравнения на $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, получим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, что совпадает с множеством решений, полученными при решении уравнения первым способом; 3) у к а з а н и е. Перенесем $\sin 3x$ в левую часть уравнения и разложим ее на множители по формуле разности синусов, тогда $\sin 5x - \sin 3x = 0$, $2 \sin x \cos 4x = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $\cos 4x = 0$; 4) $\cos 7x - \cos x = 0$, $2 \sin 4x \sin (-3x)$, откуда $\sin 4x = 0$ или $\sin (-3x) = 0$. Ответ: $\left\{ x = \frac{\pi}{4} k; x = \frac{\pi}{3} k \right\}$; 5) решениями данного уравнения будут те значения переменного, при которых делимое равно нулю, а делитель не

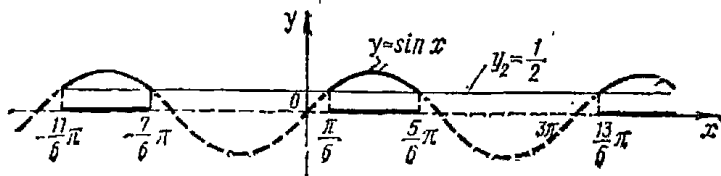


Рис. 162

равен нулю и не теряет смысла. Приравниваем числитель нулю: $\operatorname{tg} x = 0$, откуда $x = \pi k$. Но при этих значениях x знаменатель данного уравнения ($\sin 3x$) обращается в ноль при любом целом k ($\sin (3\pi k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$). Следовательно, данное уравнение корней не имеет. Ответ: $\emptyset$.

324. 1) Строим графики функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = 1/2$ (рис. 162).

Отмечаем абсциссы точек пересечения этих графиков (решаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$). Данное неравенство справедливо для тех x , где график функции $y_1 = \sin x$ лежит выше прямой $y_2 = 1/2$; на отрезке $[0; 2\pi]$ это будет выполняться, если $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Поскольку период функции $\sin x$ равен 2π , это соотношение будет повторяться через $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Окончательное решение данного неравенства такое:

$$2\pi k + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Эту запись надо понимать так: данное неравенство справедливо в интервалах $\pi/6 < x < 5\pi/6$ при $k=0$, $13\pi/6 < x < 17\pi/6$ при $k=1$,

$-11\pi/6 < x < -7\pi/6$ при $k=-1$ и т. д.; 2) $2\pi k + \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

3) из рис. 162 видно, что на отрезке от 0 до 2π график функции $y_1 = \sin x$ лежит ниже графика прямой $y_2 = \frac{1}{2}$ в двух интервалах:

$[0; \pi/6]$ и $[5\pi/6; 2\pi]$; поэтому здесь удобнее искать решение неравенства на отрезке $[-3\pi/2; \pi/2]$, равном периоду функции, где неравенство справедливо на одном интервале. Части графика, которые лежат ниже прямой, и соответствующие им части оси Ox , изображающие решение неравенства, показаны пунктиром. Полное решение неравенства такое:

$$2\pi k - \frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

4) $2\pi k - \frac{4\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. 325. 1) $2\pi k - \frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ (рис. 163);

2) $2\pi k + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ (рис. 163); 3) $2\pi k - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; 4) $2\pi k + \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$. 326. 1) $\pi k + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} +$

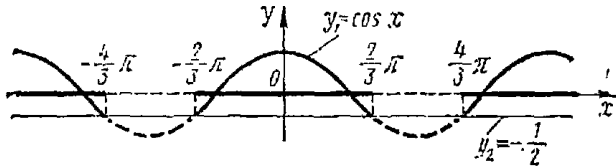


Рис. 163

+ πk (рис. 164); 2) $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$ (рис. 164); 3) $\pi k - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$; 4) $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k$. 327. 1) $F'(x) = (x^3)' =$

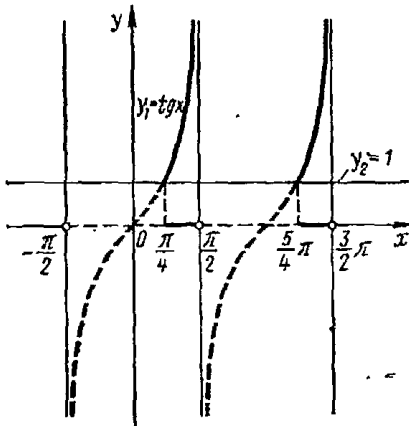


Рис. 164

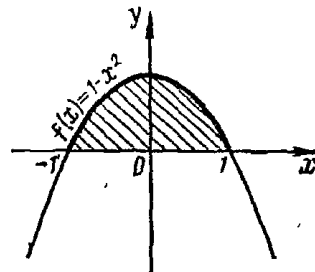


Рис. 165

$= 2x = f(x)$ для всех $x \in (-\infty; \infty)$. 2) $F'(x) = (-\cos x + 2)' = \sin x = f(x)$; 3) $F'(x) = e^x = f(x)$. 328. Операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием. С помощью интегрирования находят для заданной функции все ее первообразные. 330. 1) Все первообразные для $f(x) = x^2$ содержатся в формуле $\frac{x^3}{3} + C$. Надо подобрать постоянную C так, чтобы точка $M(1; 1)$ лежала на графике искомой первообразной, поэтому $1 = \frac{1^3}{3} + C$, откуда $C = \frac{2}{3}$. Следова-

тельно, искомая первообразная есть $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$; 2) $F(x) = \sin x + 1$.

331. 1) Для x первообразной функцией является $\frac{x^3}{2}$, для $3x$ по правилу 2) $\frac{3x^2}{2}$, для 2 первообразная функция есть $2x$. Поэтому по пра-

вилу 1) для функции $3x+2$ первообразной будет $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + C$;

2) $F(x) = 5 \sin x + 3x + C$; 3) $F(x) = 2 \ln x - 3 \cos x + C$.

332. 1) $\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$; 2) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} -$

$-\sin 0 = 1$; 3) $\ln x \Big|_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9$.

333. 1) Данная фигура — криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = 3x^2$, отрезком $[0; 2]$ оси Ox и прямыми $x=0$ и $x=2$; $S = \int_0^2 3x^2 dx = 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 =$

$= 8$ (кв. ед.) 2) $S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 - \right.$

$\left. - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{4}{3}$ (кв. ед.) (рис. 165); 3) $S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 4$ (кв. ед.); 4) $S = e^x \Big|_0^2 = e^2 - 1 \approx 6,4$ (кв. ед.).

Геометрия

334. 1. $D \rightarrow E$, $F \rightarrow K$, $A \rightarrow A$. 2. Сторона AB отображается на дугу AB . 3. Ломаная ABD . 335. 1. На стороне B_1C_1 отложить $|B_1M_1| = |BM|$. 2. Из вершин A_1 и B_1 надо провести две окружности соответственно радиусами AM и BM . Эти окружности пересекутся в двух точках; та из них, которая лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$, и будет искомой. 336. Строим угол COC_1 , конгруэнтный углу AOC (рис. 166). При повороте на угол AOC точка C перейдет в точку C_1 , а точка A — в точку C . Затем строим угол BOB_1 , конгруэнтный углу AOC . Тогда точка B перейдет в точку B_1 . Треугольник ABC отобразится на треугольник CB_1C_1 . 337. Квадрат отображается на себя при поворотах вокруг O — точки пересечения диагоналей на 90° , 180° , 270° как по часовой, так и против часовой стрелки. 338. У к а з а н и е. Строим $|MO| = |OM_1|$, $|NO| = |ON_1|$; $|PO| = |OP_1|$ ($N \in a$; $P \in b$). 339. Осевая симметрия есть перемещение, а при перемещении каждая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру. 340. 1) Отрезок AB имеет две оси симметрии: прямую AB и прямую l , проходящую через середину отрезка AB перпендикулярно ему; 2) круг имеет бесконечно много осей симметрии, проходящих через центр этого круга; 3) прямоугольник имеет две оси симметрии — серединные перпендикуляры к его смежным сторонам; 4) ромб имеет две оси симметрии — прямые, содержащие его диагонали; 5) квадрат имеет четыре оси симметрии — две содержат диагонали и две — серединные перпендикуляры к смежным сторонам.

341. У к а з а н и е. $M_1\hat{O}M_2 = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ (рис. 167);

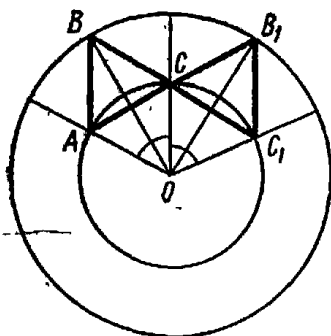


Рис. 166

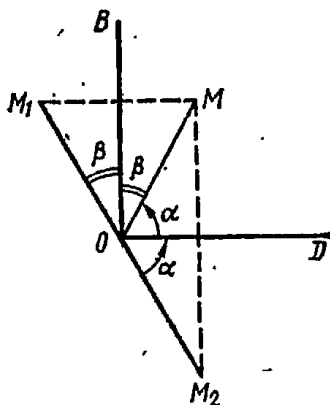


Рис. 167

342. 1) Две: плоскость, проведенную через середину отрезка перпендикулярно ему, и плоскость, содержащую отрезок; 2) две. 343. Результат последовательного выполнения двух поворотов с общим центром R^α и R^β обозначается $R^\beta \circ R^\alpha$ и называется *композицией поворотов*. При любых углах поворота α и β справедливо равенство $R^\beta \circ R^\alpha = R^{\alpha+\beta}$.

Композиция двух поворотов с общим центром переместительна, т. е. $R^\beta \circ R^\alpha = R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$. 344. 1) $A_1(3; -2)$; 2) $A_2(-3; 2)$. 345. Обратимое отображение пространства на себя*, при котором две различные точки имеют различные образы, называется *преобразованием пространства*. Одним из видов преобразования пространства является центральная симметрия, где каждой точке пространства A ставится в соответствие симметричная ей точка A_1 относительно центра O .

Другим видом преобразования пространства является осевая симметрия (симметрия относительно плоскости), где каждая точка отображается на симметричную ей точку относительно заданной прямой (плоскости). 346. Нет, ибо существуют две различные точки шара, имеющие один и тот же образ на проектируемой плоскости. 347. Преобразование пространства, отображающее каждую точку на себя, называется *тождественным преобразованием*. Тождественное преобразование обозначают буквой E . Согласно этому определению, $E(M) = M$. 348. Углом между двумя направлениями называется величина угла между любыми двумя лучами этих направлений, имеющих общее начало; угол φ между лучами l_1 и l_2 обозначают так:

$$\varphi = (\overset{\wedge}{l_1, l_2}), \text{ где } \varphi \in [0^\circ; 180^\circ].$$

349. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина меньшего из углов, определяемых этими прямыми. Если угол между прямыми a и b равен φ , то это записывают так:

$$\varphi = (\overset{\wedge}{a, b}), \text{ где } \varphi \in [0^\circ; 90^\circ].$$

350. 1. Нет. Эти векторы противоположно направлены. 2. Да.

* Это значит, что при отображении любая точка пространства имеет прообраз в этом же пространстве

$\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ обозначают один и тот же вектор, поэтому они имеют одинаковую длину. 3. Нет. Различные векторы могут иметь равные длины. 351. 1. Три вектора: $\vec{AB}$; $\vec{BA}$ и $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$. 2. $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{CB}$, $\vec{AC}$, $\vec{CA}$ — всего 6 векторов. 353. Отложим вектор $\vec{a}$ от произвольной точки A : $\vec{a} = \vec{AB}$ (рис. 168), а вектор $\vec{b}$ от точки B : $\vec{b} = \vec{BC}$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ *. Эта формула выражает «правило треугольника» для сложения векторов. Она позволяет выполнять их сложение, не прибегая к чертежу. Например, $\vec{CD} + \vec{DE} = \vec{CE}$. По правилу «параллелограмма» сумма двух векторов есть вектор, изображенный диагональю параллелограмма, построенного на данных

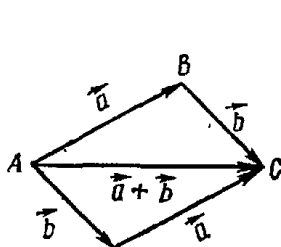


Рис. 168

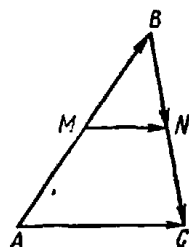


Рис. 169

векторах как сторонах (рис. 168). 354. 1. Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. 2. Вектор есть параллельный перенос, а перенос, обратный данному, называют *противоположным* вектором. Вектор, противоположный $\vec{AB}$, обозначают $-\vec{AB}$ или $\vec{BA}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, есть $-\vec{a}$. 3. Да. 355. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$; $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$ (как суммы двух противоположных векторов); $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$ (сумма двух нулевых векторов равна нулю). 356. Вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ называется *разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$. 2. Отложим от произвольной точки вектор $\vec{OA} = \vec{a}$, от точки A вектор $-\vec{b} = \vec{AB}$, тогда $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$. 357. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$; $\vec{BC} = -\vec{OA} - \vec{OB}$; $\vec{CD} = -\vec{OB} + \vec{OA}$. 358. $\vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{AO}$; $\vec{CD} + \vec{DA} = -2\vec{AO}$. 359. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ (рис. 169), $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC})$. Векторы $\vec{AC}$ и $\vec{MN}$ отличаются только числовыми

множителями, следовательно, $|\vec{MN}| = \frac{1}{2}|\vec{AC}|$ и $[\vec{MN}] \parallel [\vec{AC}]$.

360. $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$, $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, следовательно, $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{BA})$.

* $\vec{AC}$ называется *замыкающим вектором*, начало его совпадает с началом первого, а конец — с концом второго вектора.

361. $\vec{BM} = \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2}$. Указание. Дополнить данный треугольник

до параллелограмма, диагональ которого — удвоенная медиана. 362. Для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k\vec{b}$, где k — число. Это значит, что из равенства $\vec{a} = k\vec{b}$ следует, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, и наоборот, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны,

то $\vec{a} = k\vec{b}$. 363. Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если лучи, задающие их направления, параллельны одной плоскости. Например, в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ векторы $\vec{AA_1}$, $\vec{CC_1}$ и $\vec{DD_1}$ компланарны, а векторы $\vec{DC}$, $\vec{DA}$ и $\vec{DD_1}$ некомпланарны. 364. Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол между направлениями этих векторов*. 365. Если

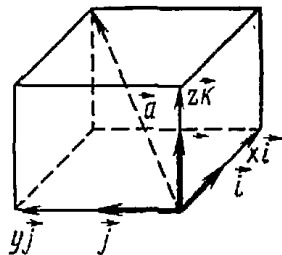


Рис. 170

$\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$; если $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, то $(\vec{m}, \vec{n}) = 180^\circ$. 366. Скалярное произведение вектора на этот же вектор равно квадрату числового значения его длины, или скалярный квадрат равен квадрату его длины: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = aa \cos 0^\circ = a^2$. 367. 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 90^\circ = 0$. 2. $ab \cos \varphi = 0$; отсюда $\varphi = 90^\circ$. 368. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 \times \cos 120^\circ = -7,5$. 369. $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$. Скалярное произведение этих векторов $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = b^2 - a^2 = b^2 - a^2 = 0$, так как длины сторон ромба равны. Итак, скалярное произведение векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ равно нулю, поэтому они взаимно перпендикулярны. 370. 1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = aa \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$; 2) сперва векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$

приводим к одному началу B , $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ$; $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = aa \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$; 3) $|\vec{LM}|$ — средняя линия треугольника BDC , отсюда

$\vec{LM} \parallel \vec{DB}$ и $|\vec{LM}| = \frac{1}{2} a$; $\vec{LM} \cdot \vec{DB} = \frac{1}{2} aa \cos 180^\circ = -\frac{1}{2} a^2$. 371. Это

тройка $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ попарно перпендикулярных единичных векторов (рис. 170). 372. Это значит представить его в виде суммы трех векторов, коллинеарных соответственно векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Притом для каждого вектора $\vec{a}$ существует только одна тройка чисел $(x; y; z)$, такая, что $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Числа x , y , z называются *координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$* ; последнее равенство записывают короче, указывая лишь координаты вектора: $\vec{a} = (x; y; z)$. 373. Вектор $\vec{a}$

* Надо помнить, что термин «угол» между векторами (направлениями) не фигура, а величина из промежутка $[0^\circ; 180^\circ]$.

можно изобразить с помощью диагонали прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого $|x|$, $|y|$, $|z|$ (рис. 170). 374. Если в базисе $(i; j; k)$ даны векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат данных векторов.

375. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a} = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$, или $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 376. 1) 8; 2) 0 — эти векторы перпендикулярны. 377. Из определения скалярного произведения двух

векторов следует, что $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} \approx 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1,5) +$

$+ 2 \cdot 3 = 6$, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1,5)^2 + 3^2} = 4,5$; $\cos \varphi = \frac{6}{3 \cdot 4,5} = \frac{4}{9}$; $\varphi = \arccos \frac{4}{9} \approx 63^\circ 37'$. 378. 1. $\vec{AB} = (x_2 -$

$- x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. 2. $\vec{AB} = (-4; -2; 4)$. 379. 2. Любые две конгруэнтные фигуры подобны, коэффициент подобия таких фигур равен единице. 3. Достаточно. 380. Коэффициент подобия — это отношение расстояния между двумя произвольными точками одного плана к расстоянию между соответствующими им точками другого плана, это отношение равно 5 или 1/5. 381. 1. Центр гомотетии отображается сам на себя. 2. Гомотетия при $k=1$ — тождественное отображение, при $k=-1$ — центральная симметрия. 3. Надо отобразить точку A

в такую точку A_1 , чтобы $\vec{OA_1} = k \cdot \vec{OA}$, причем если $k > 0$, то точки A и A_1 находятся по одну сторону от O , а при $k < 0$ точка O находится между A и A_1 . 382. 1) Увеличиваются; 2) уменьшаются; 3) при $k=1$ и $k=-1$ расстояния сохраняются. 383. 1. Да. При гомотетии с коэффициентом k все расстояния между соответствующими точками умножаются на $|k|$. 2. Нет, Гомотетичны лишь те подобные фигуры, которые расположены так, что соответственные точки и центр гомотетии лежат на одной прямой. 384. $|A_1 B_1| = 12 \text{ см} \cdot 0,8 = 9,6 \text{ см}$; $|B_1 C_1| = 6,4 \text{ см}$, $|A_1 C_1| = 8 \text{ см}$. 385. Надо сперва построить треугольник, гомотетичный данному, с коэффициентом $k=1,5$, а затем выполнить перемещение полученного треугольника. 386. Это следует из того, что если две фигуры подобны, то одну фигуру можно получить из другой, выполняя последовательно гомотетию к перемещению. При гомотетии угол переходит в конгруэнтный ему угол, а перемещение также сохраняет величину углов. 387. Нет. 388. Отрезки называются пропорциональными, если пропорциональны их длины. 389. 36 см. 390. 30 м. Указание. Прямая DE отсекает от данного треугольника треугольник BDE , стороны которого пропорциональны сторонам треугольника ABC . Отсюда пропорция $|AC| : |DE| = |BC| : |BE|$. 391. 19,2 см. 392. Подобны, так как стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого. 393. Подобны второй и третий треугольники. 394. Углы не изменяются, ибо треугольники подобны. 395. Могут, если угол при вершине равен 68° . 396. 1) Прямоугольные треугольники, имеющие по конгруэнтному острому углу, подобны; 2) равнобедренные треугольники подобны, если угол при основании (вершине) одного равнобедренного треугольника конгруэнтен углу при основании (вершине) другого. 397. Если это углы при основаниях (вершинах), то треугольники подобны. Если же угол при основании одного треугольника конгруэнтен углу при вершине дру-

того, то треугольники могут быть и не подобны. 400. Указание.

Доказать, что $\hat{E} = \hat{C}$. 401. $|AD| = 5\frac{1}{3}$ см, $|BD| = 4$ см. Указание.

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ (по двум углам) (рис. 171). Для того чтобы без-
ошибочно указать соответственные
стороны этих треугольников, обо-
значим одинаковыми цифрами рав-
ные углы этих треугольников.
Запишем сначала стороны одно-
го треугольника, например ABC ,

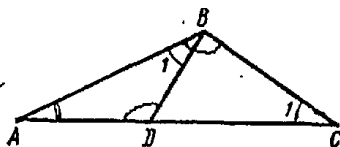


Рис. 171

предыдущими членами ряда равных отношений: $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$,

а затем соответственные стороны треугольника ABD — последующими членами этого ряда, тогда получим $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Возьмем

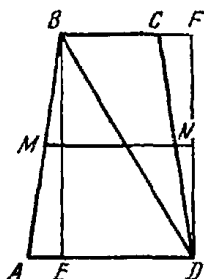


Рис. 172

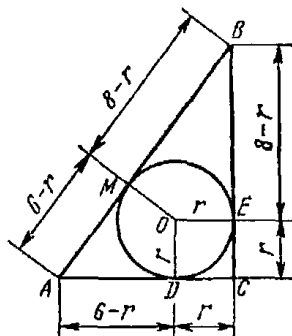


Рис. 173

пропорцию $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ (если бы мы взяли пропорцию из других отношений, то там оказалось бы два неизвестных члена), найдем из нее $|AD|$, а затем из пропорции $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$ находим $|BD|$.

402. 18 см; 4,4 см. 403. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 404. Искомый отрезок средняя линия треугольника, длина его равна 8,5 см. 405. Высота данного прямоугольника равна 9 см, полученного — 16 см; диагональ его равна 20 см. 406. Меньшая боковая сторона трапеции равна 24 см, периметр ее — 78 см. 407. 2,4 см. Указание. Сперва вычислить по теореме Пифагора $|AD|$, затем вычислить $|DC|$ как высоту в прямоугольном треугольнике ABD по формуле $h = \frac{ab}{c}$ (см. 444. 1).

408. $\sqrt{a^2 - b^2}$; $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. 409. 1. $\approx 6,9$. Указание. Большее основание равно 8 см, меньшее 4,5 см, проекция большей боковой стороны на основания равна 3,5 см. 2. 10 дм. Указание. Провести высоты BE и DF (рис. 172), тогда в треугольнике BDE длина

катета ED равна длине средней линии трапеции, 3. 5 см; 3 см.

Указание. $|ED|=4$ см (рис. 172); $|BE|=|DF|=4\sqrt{3}$ см, $|CF|=1$ см, 4. 24 см. Указание. Во всяком описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, поэтому сумма боковых сторон этой трапеции равна 52 см, 5. 10 см. Указание.

Если обозначить расстояние от центра окружности до большего основания через x (см), то расстояние от центра до меньшего основания равно $14-x$ (см). Затем выразить радиус R из двух различных прямоугольных треугольников. 410. 1. 4,8 см. Указание. Радиус вписанного круга — высота прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 и 8 см (см. 444. 1). 2. Обозначим длину радиуса вписанной окружности через r , т. е. $|OE|=|OD|=|OM|=r$ (рис. 173), тогда $|AD|=|AM|=6-r$ и $|BE|=|BM|=8-r$ (по свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности). По теореме Пифагора, $(|AM|+|MB|)^2=|AC|^2+|BC|^2$ или $(14-2r)^2=6^2+8^2$, откуда $r=2$ см. Эту задачу можно решить также, воспользо-

зовавшись формулой задачи 450. 1). 3. $R\sqrt{3}$. Указание. Половина искомой хорды — высота равностороннего треугольника, у которого сторона равна R . 411. 1. Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла. 2. Катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего определяемому катету, или на котангенс прилежащего к нему угла. 3. Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего угла или на косинус прилежащего угла. 4. Из треугольника ABD имеем: $h=c \sin \alpha$, $h=c \cos \beta$, $h=p \operatorname{tg} \alpha$, $h=p \operatorname{ctg} \beta$,

$$c = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{h}{\cos \beta}. \quad \text{Из треугольника } BDC \quad h=a \sin \gamma, \quad h=a \cos x,$$

$$h=q \operatorname{tg} y, \quad h=q \operatorname{ctg} x, \quad a = \frac{h}{\sin y}, \quad a = \frac{h}{\cos x}, \quad c = \frac{p}{\sin \beta}, \quad c = \frac{p}{\cos \alpha}.$$

$$5: p = c \sin \beta, \quad p = c \cos \alpha \text{ и т. д. } 412. \text{ Из треугольника } ABC \text{ имеем: } |AB| = \frac{a}{\cos \beta}, \quad |AC| = a \operatorname{tg} \beta, \text{ из треугольника } BDC: |CD| = a \sin \beta, \quad |BD| = a \cos \beta, \text{ из треугольника } ADC: |AD| = |AC| \sin \beta = a \operatorname{tg} \beta \sin \beta.$$

$$413. \text{ Периметр треугольника (см. рис. 27) } P = |AB| + |BC| + |AC| = c + c \sin \alpha + c \cos \alpha = c(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) = 2\sqrt{2}c \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$(\text{см. решение 309. 10}). 414. 1) |BC| = b \operatorname{tg} \alpha \text{ (см. рис. 27)}, \quad |AB| = \frac{b}{\cos \alpha}, \quad P_{\triangle ABC} = b \operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{\cos \alpha} + b = \frac{b(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha} =$$

$$\frac{2b\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha}.$$

Это выражение можно упростить, если $\cos \alpha$ заменить на $\sin(90^\circ - \alpha)$ и применить формулу синуса двойного аргумента, тогда

$$P_{\triangle ABC} = \frac{2b\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

2) радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, т. е.

$R = \frac{1}{2} |AB| = \frac{b}{2 \cos \alpha}$; 3) медиана гипотенузы равна радиусу описанной окружности, т. е. $\frac{b}{2 \cos \alpha}$; 4) указание. В прямоугольном треугольнике высоты пересекаются в вершине прямого угла, а центр описанного круга находится на середине гипотенузы, поэтому искомое расстояние — медиана гипотенузы. 415. Указание. Меньшая боковая сторона, являющаяся высотой трапеции, составляет с указанной диагональю угол α , поэтому: 1) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$; 2) $a \sin^2 \alpha$. 416. Пусть α — искомый угол, тогда из треугольника ABE (рис. 174)

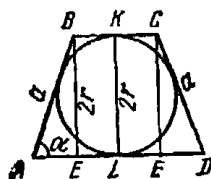


Рис. 174

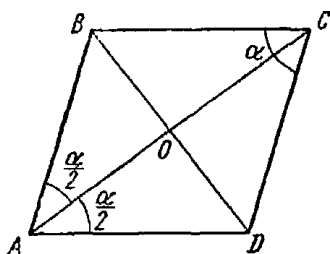


Рис. 175

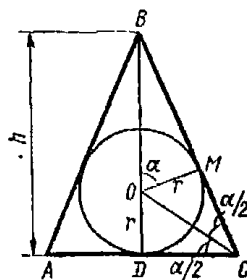


Рис. 176

$\sin \alpha = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{2r}{a}$, $\alpha = \arcsin \frac{2r}{a}$, тупой угол ABC равен $180^\circ - \alpha = 180^\circ - \arcsin \frac{2r}{a}$. 417. Пусть острый угол ромба $ABCD$ равен α

(рис. 175). Из прямоугольного треугольника AOB следует $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{|BO|}{|AO|} = \frac{\frac{1}{2} d_1}{\frac{1}{2} d_2} = \frac{d_1}{d_2}, \text{ откуда } \frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg} \frac{d_1}{d_2}, \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{d_1}{d_2}, \text{ тупой угол}$$

ромба равен $180^\circ - 2 \operatorname{arctg} \frac{d_1}{d_2}$. 418. Вследствие того что $[BD] \perp [DC]$,

$[OM] \perp [BC]$, $\widehat{BOM} = \widehat{BCA} = \alpha$ (рис. 176). Из треугольника BMO $\cos \alpha = \frac{|OM|}{|OB|} = \frac{r}{h-r}$, откуда $\alpha = \arccos \frac{r}{h-r}$. 419. 1. Если $\hat{C} = 90^\circ$, то $\cos \hat{C} =$

$= 0$ и формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$ обращается в формулу $c^2 = a^2 + b^2$ — зависимость между сторонами прямоугольного треуголь-

ника, установленная теоремой Пифагора. 2. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$,

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}}$ 3. Зная две стороны треугольника и угол между ними, можно найти третью сторону треугольника, а зная стороны треугольника a , b и c , можно определить его углы по формулам:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

420. 1. Если $\hat{A}$ — прямой, то $a^2 = b^2 + c^2$; если $\hat{A}$ — острый, то $a^2 < b^2 + c^2$; если $\hat{A}$ — тупой, то $a^2 > b^2 + c^2$. 2. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то $\hat{A}$ — прямой (по теореме, обратной теореме Пифагора: «если квадрат какой-нибудь стороны равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник — прямоугольный»); если $a^2 < b^2 + c^2$, то $\hat{A}$ — острый; если $a^2 > b^2 + c^2$, то $\hat{A}$ — тупой. 421. 1) $c =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}; \quad 2) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \sqrt{2};$$

$$3) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}. \quad 422. \text{ Из треугольника } ABD \quad |AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB||BD|\cos 60^\circ, \text{ т. е. } |AD|^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos 60^\circ,$$

откуда $|AD| = \sqrt{19} \approx 4,4$ см. 423. $a\sqrt{3}$. 424. По формулам 419. 3)

$$\cos \hat{A} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}, \quad \hat{A} = 60^\circ. \quad 425. \quad d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha;$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad 426. \text{ Из соотно-$$

шений предстоящей задачи следует, что $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. 427. 6 см.

У к а з а н и е. Продолжить искомую медиану на отрезок, равный этой медиане, и конец его соединить с вершинами данного треугольника. Из полученного параллелограмма найти диагональ (удвоенную медиану) — она равна 12 см (см. формулу 426). 428. 1. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру

круга, описанного около этого треугольника, т. е. $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} =$

$$= \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R. \quad 2. \text{ Сторона треугольника равна диаметру описанной}$$

окружности, умноженному на синус противолежащего угла, т. е.

$$a = 2R \sin \hat{A}, \quad b = 2R \sin \hat{B}, \quad c = 2R \sin \hat{C}. \quad 3 \text{ Во всяком треугольнике}$$

стороны относятся между собой как синусы противолежащих углов,

$$\text{т. е. } \frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}. \quad \text{Если, например, в пря-}$$

моугольном треугольнике острые углы равны 30 и 60°, то отношение

$$\text{катетов } \frac{a}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 4. \text{ Да. Если один из углов треуголь-$$

ника, например $\hat{C} = 90^\circ$, то формула $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ при-

нимает вид $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = c = 2R$ ($\sin 90^\circ = 1$). Отсюда $a = c \sin \hat{A}$,

$b = c \sin \hat{B}$, $c = 2R$, т. е. получились основные соотношения между сто-

ронами и углами прямоугольного треугольника; гипотенуза его равна

диаметру описанного круга. 5. Зная сторону треугольника и два при-

лежащих к ней углов, можно определять третью сторону. Зная две

стороны треугольника и угол, лежащий против одной из этих сторон,

можно определять третью сторону и остальные углы (в последнем

случае возможны два решения, одно решение и ни одного решения).

429. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, откуда $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$; $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]}$,
 $c = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$.

430. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катет $|BC| = a$; $\hat{B} = \beta$; CD — биссектриса прямого угла ($D \in [AB]$), тогда $\hat{BCD} = 45^\circ$; $\hat{CDB} = 180^\circ - (45^\circ + \beta)$. Из треугольника CDB по теореме синусов $\frac{|CD|}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin [180^\circ - (45^\circ + \beta)]}$, откуда $|CD| = \frac{a \sin \beta}{\sin (45^\circ + \beta)}$.

431. 1) Угол при основании этого треугольника равен 30° , основание $a = 12\sqrt{2}$ см; 2) угол при вершине равен 120° , по формуле $2R = \frac{a}{\sin A}$

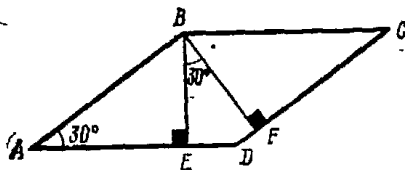


Рис. 177

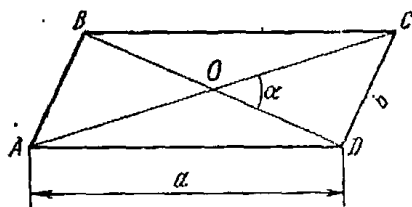


Рис. 178

находим, что $R = 4\sqrt{6}$ см. 432. $|AC| = \frac{h}{\sin \alpha}$, из треугольника ACB ,

по теореме синусов, $\frac{|AB|}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{|AC|}{\sin \beta}$, откуда $|AB| = \frac{h \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

433. 1. На 180 м. Указание. Периметр прямоугольника 580 м, площадь его 10 000 м². Сторона квадрата 100 м, его периметр 400 м. 2. На 11 025 м². Указание. Сторона квадрата равна $580 : 4 = 145$ м; его площадь равна $145^2 = 21\,025$ м². 434. Если основание прямоугольника принять за a , а высоту за b , то его площадь составит ab . Увеличенное основание — $1,5a$, уменьшенная высота — $0,5b$; площадь нового прямоугольника $1,5a \cdot 0,5b = 0,75ab$, т. е. уменьшится на 25%.

435. $m(m+n)$. 436. 1) $0,5ab$; 2) $0,5ab\sqrt{2}$; 3) $0,5ab\sqrt{3}$. 437. 1) 60 см². Указание. Угол между высотами равен углу параллелограмма (рис. 177); 2) 18 см². Указание. Сумма двух смежных сторон этого параллелограмма равна 10,5 см; если одну из них обозначить через x (см), то другая будет $10,5 - x$ (см), затем составить уравнение, исходя из того, что площадь параллелограмма $S = |AD| \cdot |BE| = |DC| \cdot |BF|$ (рис. 177). 438. 12,8 см и 8 см. Указание. Расстояние между большими сторонами параллелограмма, т. е. меньшая его высота равна 5 см, а большая его высота равна 8 см. 439. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 178) диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Если $|AC| = d_1$, а $|BD| = d_2$, то $S_{ABCD} =$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha \quad (\text{см } 452) \quad \text{По теореме косинусов, из треугольни-}$$

$$\text{ка } COD \text{ имеем } b^2 = (d_1/2)^2 + (d_2/2)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \alpha = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} -$$

$-\frac{d_1 d_2}{2} \cos \alpha$. Из треугольника AOD имеем $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 -$
 $- 2 \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos (180^\circ - \alpha) = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2} \cos \alpha$. Найдем разность
 между a^2 и b^2 : $a^2 - b^2 = d_1 d_2 \cos \alpha$ и $d_1 d_2 = \frac{a^2 - b^2}{\cos \alpha}$. Если обе части

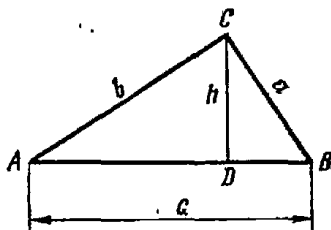


Рис. 179

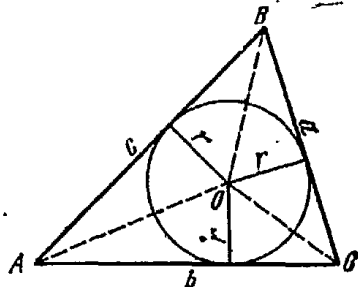


Рис. 180

последнего равенства умножить на $\frac{1}{2} \sin \alpha$, то $S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha =$

$$= \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha. \quad 440. \text{ Пусть стороны параллело-}$$

грамма a и b , тогда площадь его $S = ab \sin \alpha$. По теореме косину-
 сов, $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 -$
 $- 2ab \cos \alpha$; $d_1^2 - d_2^2 = 4ab \cos \alpha$, $ab = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4 \cos \alpha}$. Если обе части этого

равенства умножить на $\sin \alpha$, то $S = ab \sin \alpha = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \operatorname{tg} \alpha. \quad 441. 2ar.$

442. $8r^2$. 443. Площадь ромба $S = 0,5d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Если $\alpha = 90^\circ$, то ромб
 превращается в квадрат — его площадь $S = 0,5d^2 \operatorname{ctg} 45^\circ = 0,5d^2$.

444. 1. Если принять за основание гипотенузу c (рис. 179), то пло-
 щадь $S = 0,5ch_C$; если один из катетов принять за основание, то вы-
 сотой его будет другой катет, тогда $S = 0,5ab$, отсюда $0,5ch_C = 0,5ab$,
 $h_C = \frac{ab}{c}$. 3. $\frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$. 4. Rh . 5. $36,6 \text{ см}^2$ 445. 1. Надо разделить

основание треугольника на равные части и соединить прямыми вер-
 шину треугольника с точками деления. 2. Если обозначить площадь
 треугольника ABC через S , то площадь треугольника ABD равна $\frac{1}{2} S$,

так как у них одинаковая высота, а основание треугольника ABD
 в два раза меньше. Треугольники AMD и DMC равновелики, и пло-
 щадь каждого из них равна половине площади треугольника ABD ,

т. е. $\frac{S}{4}$, поэтому площадь треугольника AMC равна $\frac{1}{2} S$.

446. 1) $\frac{1}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; 2) $h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; 3) $r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Указание.

Площадь $S_{\text{тр}} = |DC| \cdot |BD|$ (см. рис. 176); $|DC| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $|BD| =$
 $= |DC| \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$; 4) угол при вершине этого треугольника

равен $180^\circ - 2\alpha$, $S = \frac{1}{2} b^2 \sin (180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} b^2 \sin 2\alpha$. 447. 1) $S =$

$= \frac{1}{2} aa \sin 60^\circ = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{3} h^2 \sqrt{3}$; 3) сторона правильного
 треугольника $a_3 = R \sqrt{3}$, подставив вместо a выражение $R \sqrt{3}$,
 получим $S = \frac{1}{4} (R \sqrt{3})^2 \sqrt{3} = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$; 4) $3r^2 \sqrt{3}$. Указание.

$R = 2r$, сторона $a = 2r \sqrt{3}$. 448. Из формулы $Q = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ найдем,

что $a = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$. 449. 5 см. Указание. Вычислить сперва высоту,

опущенную на большую сторону по формуле $h_a = \frac{2S}{a}$, или синус угла
 между данными сторонами из формулы $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} ab \sin \varphi$. 450. 1) Если

соединить центр O вписанного в треугольник круга с его вершинами
 A , B и C (рис. 180), то $S_{\text{тр}} ABC = S_{\text{тр}} BOC + S_{\text{тр}} AOC + S_{\text{тр}} AOB =$
 $= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} (a+b+c) r = pr$, откуда $r = \frac{S}{p}$; 2) по тео-
 реме синусов, $2R = \frac{c}{\sin \hat{C}}$, $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$, откуда $\sin \hat{C} = \frac{2S}{ab}$;

подставив это значение в первое равенство, получим $2R = a \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{abc}{2S}$,

$R = \frac{abc}{4S}$. 451. 1) $S = 84$; 2) $h_a = 11,2$; $h_b = 12$; $h_c = 12 \frac{12}{13}$; 3) $r = 4$;

4) $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8,125$. 452. Пусть φ в произвольном четырехуголь-
 нике $ABCD$ (рис. 181) диагонали AC и BD пересекаются в точке O

и соответственно равны d_1 и d_2 ; $\widehat{COD} = \widehat{AOB} = \varphi$. Площадь этого че-
 тырехугольника равна сумме площадей треугольников ABC и ADC ,
 т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| h_1 + \frac{1}{2} |AC| h_2 = \frac{1}{2} |AC| (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} d_1 (h_1 + h_2)$,
 но $h_1 = |OD| \sin \varphi$, $h_2 = |OB| \sin \varphi$, $h_1 + h_2 = (|OD| + |OB|) \sin \varphi =$
 $= d_2 \sin \varphi$, поэтому $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$. 453. 1) $84 \sqrt{3} \approx 146 \text{ см}^2$;

2) $100 \sqrt{3} \approx 173 \text{ см}^2$. 454. $\frac{1}{4} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha$. 455. В трапеции $ABCD$

(рис. 182) BE и CF — высоты, $\widehat{ABE} = \alpha - 90^\circ$, $|AE| = a \sin(\alpha - 90^\circ) = -a \cos \alpha$.
 Больше основание трапеции $|AD| = 2|AE| + |EF| = -a - 2a \cos \alpha$, высота $|BE| = a \cos(\alpha - 90^\circ) = a \sin \alpha$; $S = \frac{|AD| + |BC|}{2} |BE| = \frac{(a - 2a \cos \alpha + a) a \sin \alpha}{2} = \frac{2a^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{2} = 2a^2 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Замечание. К такому же результату можно

прийти, зная, что $\widehat{CDF} = \widehat{BAE} = 180^\circ - \alpha$. 456. Длины диагоналей этой трапеции равны. Угол между диагоналями равен $180^\circ - 2\alpha$.

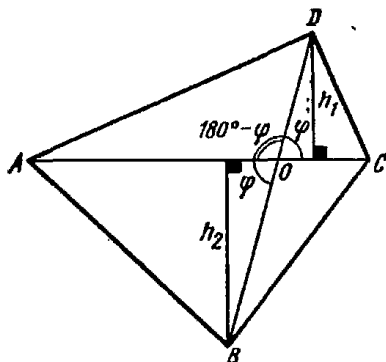


Рис. 181

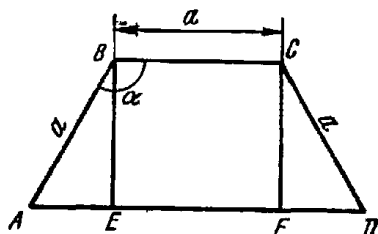


Рис. 182

Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними (см. 452), откуда $S = \frac{1}{2} dd \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} d^2 \sin 2\alpha$; $S = \frac{1}{2} d^2 \sin 120^\circ = 64 \sqrt{3} \approx$

≈ 111 (см²). 457. $S_{\text{трап}} = \frac{1}{2} d^2 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} d^2$ (см. 452). 458. Если

h — высота трапеции, то площадь одной части $S_1 = \left(a + \frac{a+b}{2}\right) \frac{h}{2}$,
 другой $S_2 = \left(\frac{a+b}{2} + b\right) \frac{h}{2}$, их отношение $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3a+b}{3b+a}$ 459. 9:4.

460. Коэффициент подобия (масштаб) равен 1000. Площадь участка на местности в 1 000 000 раз больше, чем на плане. 461. Площадь данного треугольника в четыре раза больше площади отсеченного треугольника (коэффициент подобия равен двум). Площадь трапеции больше площади отсеченного треугольника в три раза. 462. Коэффициент подобия треугольников равен 2, поэтому искомая сторона равна 10 см. 463. Надо построить многоугольник, у которого каждая сторона была бы в 3 раза больше соответственной стороны данного. 464. 1. Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность. Это определение короче записывают так: $C = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

* Не следует считать выражение $-a \cos \alpha$ отрицательным, ведь косинус тупого угла α отрицателен, поэтому выражение $-a \cos \alpha$ положительно.

2. а) $C=2\pi R$; б) $C=\pi D$. 3. Число π равно отношению длины окружности к диаметру, т. е. $\pi = \frac{C}{2R}$. Доказано, что π — число иррациональное, г. е. может быть выражено бесконечной десятичной непериодической дробью. Если за приближенную длину окружности взять периметр вписанного 96-угольника, то $\pi \approx 3,14$ с недостатком с точностью до 0,01. 465. Очевидно, что длина окружности больше периметра правильного вписанного шестиугольника и меньше периметра описанного квадрата (рис 183), т. е. $6a_6 < C < 4b_4$ или

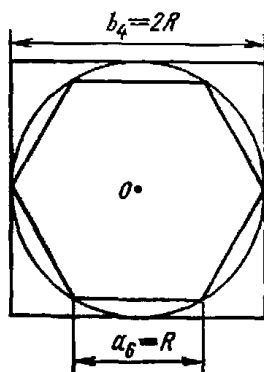


Рис. 183

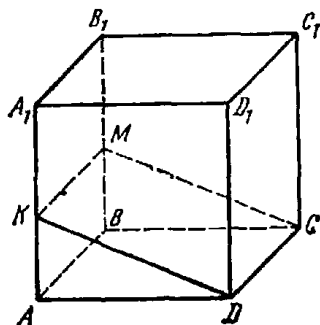


Рис. 184

$6R < 2\pi R < 8R$; разделив на $2R$, получим, что $3 < \pi < 4$. 466. По формуле $r = \frac{S}{p}$ (см 450) найдем, что $r = 0,8$ дм, $C = 1,6\pi \approx 5$ (дм).

467. 1. а) $S_{кр} = \frac{1}{2} CR$; б) $S_{кр} = \pi R^2$; в) $S_{кр} = \frac{1}{4} \pi D^2$. 2. Пусть радиус одного круга R_1 , а другого R_2 , тогда $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$; $S_1 : S_2 = \pi R_1^2 : \pi R_2^2 = R_1^2 : R_2^2$. 3. Отношение площадей равно 4, следовательно, отношение квадратов радиусов равно 4, а отношение радиусов равняется 2, т. е. радиус увеличится в два раза. 468. 1. а) На $2\pi(R+1) - 2\pi R = 2\pi$ (см); б) на $\pi(R+1)^2 - \pi R^2 = \pi(2R+1)$ (см²). 2. На 300%. 3. Длина уменьшенного радиуса $0,75r$, уменьшенная площадь $\pi(0,75r)^2 = 0,5625\pi r^2$; площадь круга уменьшится на 43,75%. 469. Пусть радиус вырезаемого круга R , тогда его площадь πR^2 , сторона квадрата будет $2R$, а его площадь $4R^2$. По отношению к площади квадрата, принимаемого за 100%, площадь круга составляет $\frac{\pi R^2}{4R^2} \cdot 100\% \approx 78\%$. Значит, на обрезки пойдет $\approx 22\%$ материала.

470. Если площадь сечения каждой малой трубы $\frac{\pi d^2}{4}$, то площадь сечения

большой трубы $2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} \pi d^2$. Пусть D — диаметр сечения большей трубы, тогда $\frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{2} \pi d^2$, откуда $D^2 = 2d^2$, или $D =$

$=d\sqrt{2} \approx 1,41d$. 471. Площадь данного круга равна 64π см²; площадь concentрического круга 32π см², радиус этого круга r найдем из уравнения $\pi r^2 = 32\pi$; $r \approx 5,7$ см. 472. Обозначим радиус одного из четырех кругов через r , тогда площадь его будет πr^2 , а сумма площадей всех четырех кругов $4\pi r^2$. Радиус круга, вписанного в квадрат, равен $2r$, а его площадь также равна $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$.

473. $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$ (см. 428. 1), поэтому длина окружности $C = \frac{\pi a}{\sin \alpha}$;

площадь круга $S = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \alpha}$. 474. 1. Средняя линия параллельна стороне AC , расположенной на пл. P , следовательно, она параллельна и самой плоскости. 475. 1) $[AB] \parallel [DC]$ ($ABCD$ — прямоугольник),

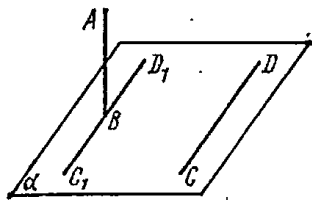


Рис. 185

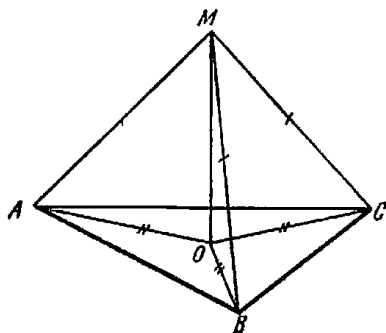


Рис. 186

$[DC] \parallel [D_1C_1]$ (DCD_1C_1 — прямоугольник) и вследствие транзитивности параллельных прямых $[AB] \parallel [D_1C_1]$. 477. Не обязательно. Например, на рис. 184 $[A_1B_1] \parallel [AB]$ и $[KM] \parallel [DC]$, однако плоскости AA_1B_1B и $ABCD$ не параллельны. 478. Эти сечения параллельны, так как $[A_1D] \parallel [B_1C]$ и $[DC_1] \parallel [AB_1]$. 479. У к а з а н и е. Провести $[MN] \parallel [AC]$ ($N \in A_1B_1$) — искомое сечение — трапеция $ACMN$. 480. У к а з а н и е. Провести $[MP] \parallel [AB]$, а затем $[NQ] \parallel [A_1B_1]$ ($P \in [AD]$; $Q \in [B_1C_1]$). 481. Будет. Для нахождения угла между прямой AB (рис. 185), которая перпендикулярна плоскости α и скрещивающейся прямой CD , расположенной на этой плоскости, надо через точку пересечения AB с плоскостью провести $(C_1D_1) \parallel (CD)$. Так как $(AB) \perp (C_1D_1)$, то и $(AB) \perp (CD)$. 482. По определению перпендикуляра к плоскости. 484. Надо убедиться в том, что карандаш перпендикулярен двум пересекающимся прямым на столе. 485. Нет. Например, апофема правильной пирамиды перпендикулярна стороне основания пирамиды, но не перпендикулярна ее основанию. Ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 191) перпендикулярно $[BB_1]$, но не перпендикулярно $[BD]$, поэтому $[AB]$ не перпендикулярно плоскости BB_1D_1D . 486. Так как $[AC] \perp [CD]$ и $[AC] \perp [CB]$, то $[AC]$ перпендикулярна и плоскости DCB . Аналогично доказывается, что $[CB]$ перпендикулярна плоскости ACD . 487. Имеем $[AC] \perp [BD]$ (по свойству диагоналей квадрата), $[AC] \perp [SO]$ ($[SO] \perp$ пл. $ABCD$). Таким образом, $[AC]$ перпендикулярен двум отрезкам SO и BD плоскости BSD , следовательно, $[AC]$ перпендикулярен этой плоскости, поэтому он перпендикулярен и прямой SD , расположенной на ней.

Аналогично доказывается, что $[BD] \perp [AS]$ 488. Указание. Доказать, что $[AB]$ перпендикулярна двум непараллельным прямым плоскости треугольника CKL . 490. Равные наклонные $|MA| = |MB| = |MC|$ (рис. 186) имеют равные проекции $|AO| = |OC| = |OB|$, т. е. точка O одинаково удалена от вершин треугольника, а это и есть центр описанного круга, причем длина каждой из проекций наклонных равна радиусу описанного круга. 491. 12 см. Указание. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость треугольника, проходит через центр круга, описанного около этого треугольника (см. предыдущую задачу), т. е. через середину гипотенузы.

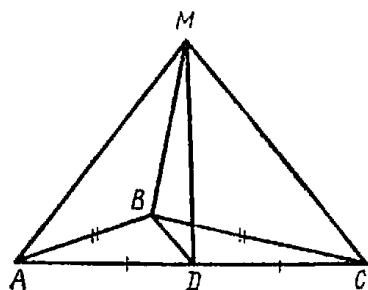


Рис. 187

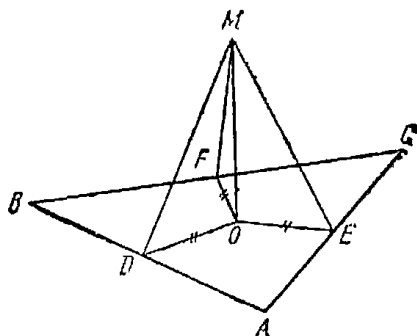


Рис. 188

492. $|AB| = |BC|$, но $|AB| > |BD|$, поэтому $|MA| = |MC|$ и $|MA| > |MD|$ (рис. 187). 493. Справедлива; $[AO] \perp (C_1D_1)$ или $(C_1D_1) \perp [AO]$, кроме того, $(C_1D_1) \perp [OB]$ (по условию), следовательно, (C_1D_1) перпендикулярна плоскости ABO (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Но $[AB]$ расположен на этой же плоскости ABO , поэтому $(C_1D_1) \perp [AB]$. 494. $[DE] \perp BC$; $[BC] \perp [AD]$. 495. а) Если

$[AC] = [AB]$; б) если $\angle ACB = 90^\circ$. 496. $[DC] \perp [CB]$, но $[CB]$ — проекция $[KC]$, следовательно, $[CD] \perp [KC]$. Аналогично доказывается, что $[AD] \perp [KA]$.

497. Пусть O — проекция точки M на плоскость треугольника (рис. 188). Если провести $[OD] \perp [AB]$, $[OE] \perp [AC]$ и $[OF] \perp [BC]$ и соединить точку M с точками D , E и F , то, по теореме о трех перпендикулярах, $[MD] \perp [AB]$, $[ME] \perp [AC]$ и $[MF] \perp [BC]$, т. е. $[MD]$, $[ME]$ и $[MF]$ — расстояния от M до сторон треугольни-

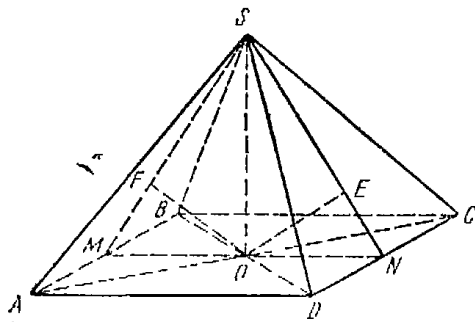


Рис. 189

ка. По условию, $|MD| = |ME| = |MF|$, поэтому и $|OD| = |OE| = |OF|$, как проекции равных наклонных. Значит, точка O одинаково удалена от сторон треугольника и, следовательно, есть центр вписанного круга. 498. $[AD] \parallel [BC]$, $[BC] \parallel [B_1C_1]$, поэтому $[AD] \parallel [B_1C_1]$; кроме того, $|AD| = |B_1C_1|$, поэтому четырехугольник AB_1C_1D — параллелограмм. Но $[AD] \perp [AB]$, так как $ABCD$ —

прямоугольник, поэтому $[AD] \perp [AB_1]$ по теореме о трех перпендикулярах, а параллелограмм, у которого один угол прямой, — прямо-

угольник. 499. Угол между наклонной и ее проекцией, т. е. $\angle ABC$, — наименьший. 500. 1. На рис. 189 $[SE]$ — проекция высоты $[SO]$ на боковую грань, поэтому $\angle OSE$ — искомый. 2. Конгруэнтность углов OSE и OSF (рис. 189) следует из конгруэнтности треугольников OSN

и OSM . 501. $\frac{h}{\sin \alpha}$. 502. $6\sqrt{3}$ см и 8 см. 503. Длина каждой про-

екции $h \operatorname{ctg} \alpha$. Половина искомого расстояния равна $h \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{\beta}{2}$.

Все расстояние равно $2h \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{\beta}{2}$. 504. Две прямые в пространстве

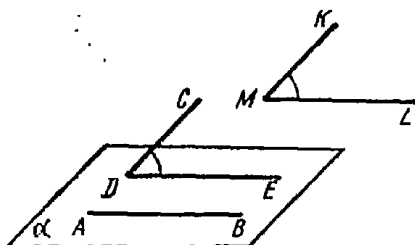


Рис. 190

могут: а) пересекаться, тогда они лежат в одной плоскости; б) быть параллельными, тогда они лежат в одной плоскости; в) не пересекаться и не быть параллельными, такие прямые не могут быть расположены в одной плоскости — они скрещиваются. 506. Если $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = M$, $M \notin a$, то $a \perp b$. 507.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 190).

Они не образуют угла в обычном

смысле, так как они не имеют общей точки. Для нахождения угла между ними поступают так: через какую-нибудь точку M пространства проводят полупрямые $[MK] \parallel [DC]$ и $[ML] \parallel [AB]$; полученный угол называют углом скрещивающихся прямых AB и CD . Удобно взять точку на одной из данных прямых. Например, $\angle CDE$ — угол между CD и AB . Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90° , то такие прямые называются взаимно перпендикулярными. Например, ребра куба AA_1 и C_1D_1 (рис. 191) взаимно перпендикулярны. 508. Прямые SO и CB , SO и AC , SO и AB скрещиваются. Угол между SO и каждой из этих сторон — прямой. 509. Прямые EF и CD скрещиваются; угол между ними равен 60° . 510. 1) Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми AB_1 и CD_1 (рис. 191) проведем через точку K — середину $[D_1C][DC]$ $[AB_1]$; угол между $[DC_1]$ и $[D_1C]$ есть угол между $[D_1C]$ и $[AB_1]$, он равен 90° ; 2) угол между $[M_1N_1]$ и $[BD]$ равен 45° ; 3) угол между скрещивающимися прямыми AA_1 и B_1D равен углу BB_1D . Если ребро куба обозначить через a , тогда $|BD| = a\sqrt{2}$; тангенс угла $BB_1D = \sqrt{2}$,

отсюда $BB_1D = 54^\circ 41'$. 511. Пусть даны плоскость α и прямая a , пересекающая эту плоскость. Если провести через данную точку A (рис. 192) прямую a_1 , параллельную a , то она пересечет α в точке A_1 ; эта точка и называется параллельной проекцией точки A на плоскость α . 512. 1. Это множество параллельных проекций всех точек данной фигуры. 2. Проекция прямой есть прямая. Проекции параллельных прямых параллельны. Отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проектируемых отрезков. 513. 1) Да; 2) нет. Например, изображенном параллелограмме не может служить трапеция; 3) нет, так как отношение длин параллель-

тых оснований параллелограмма равно единице, а отношение длин оснований трапеций не равно единице; 4) может. 514. Если прямая a , пересекающая плоскость α , перпендикулярна ей, а значит, и все проектирующие прямые перпендикулярны плоскости, то такое проектирование на плоскость называется *ортогональным* (прямоугольным).

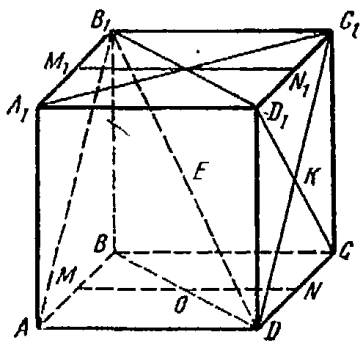


Рис. 191

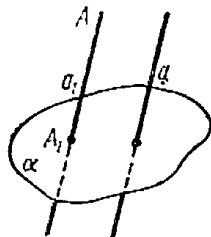


Рис. 192

Ортогональную проекцию фигуры на плоскость называют просто проекцией. 515. 1. Нет, если отрезок перпендикулярен плоскости проекций, то его проекция (ортогональная) — точка. 2. Длина проекции не превышает длины проектируемого отрезка. 517. Указание.

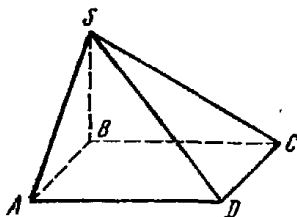


Рис. 193

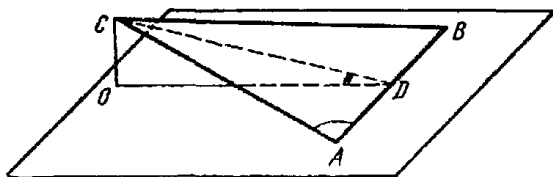


Рис. 194

Длина проекции катета $BC — |B_1C_1| = 3$ см, $|AC_1| = 2$ см, $|CC_1| = \sqrt{12}$ см, $|AB_1| = \sqrt{13}$ см. 518. Надо провести плоскость перпендикулярно ребру двугранного угла. 519. Ребро двугранного угла перпендикулярно двум прямым — сторонам линейного угла, поэтому оно перпендикулярно его плоскости. 520. Потому что если стороны двух углов сонаправлены, то эти углы конгруэнтны. 521. Это меньший из двугранных углов, образованных этими плоскостями. 522. 45° . Указание. Линейный угол этого двугранного угла есть угол между диагональю основания и его стороной. 523. Грань DSC (рис. 193) образует с основанием линейный угол SCB , а грань ASD — линейный угол SAB ; $\angle SCB = \angle SAB = 45^\circ$. 524. $\frac{c\sqrt{6}}{8}$. Указание. На

рис. 194 CO — расстояние от вершины C до плоскости α . Для построения линейного угла двугранного угла AB опускаем на ребро AB перпендикуляр OD и соединяем вершину C с точкой D . Тогда $[CD] \perp [AB]$ по теореме о трех перпендикулярах, а $\angle CDO$ —

линейный угол двугранного, величина его равна $45^\circ 52' 55''$. $6\sqrt{3}$ см $\approx 10,3$ см. Указание. Угол между катетом AC и его проекцией равен 60° . 526. 30° 528. Это следует из того, что угол между диагоналями оснований куба — прямой. Этот угол является линейным углом двугранного угла, образованного диагональными плоскостями.

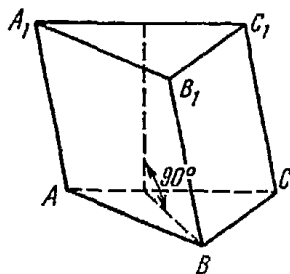


Рис. 195

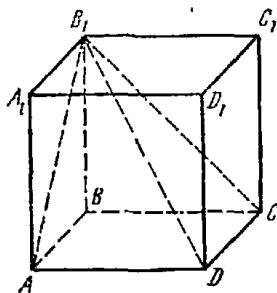


Рис. 196

529. 1) Соединим точки O и M . Так как $[CB] \perp [SM]$, то $[CB] \perp [OM]$ (по обратной теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $[CB]$ есть перпендикуляр к плоскости ASM (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Плоскость BCS проходит через $[CB]$, поэтому она перпендикулярна плоскости OSM (по признаку перпендикулярности двух плоскостей); 2) перпендикуляр $[OK]$ пересекает $[SM]$, так как если две плоскости (OSM и SCB) взаимно перпендикулярны и к одной из них (к плоскости SCB) проведен перпендикуляр $[OK]$, имеющий общую точку (O) с другой плоскостью OSM , то он весь лежит в этой плоскости. 530. 1) У куба 12 ребер — 12 двугранных углов, 8 вершин — 8 трехгранных углов; 2) 6 двугранных углов, 4 трехгранных угла. 531. 1) Нет; 2) да; 3) нет.

532. 1) Нет; 2) нет, ибо один из углов больше суммы трех остальных; 3) да 533. $S_{\text{сеч}} = \frac{S}{\cos \alpha}$. 534. в) Это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

535. У наклонной призмы длина бокового ребра больше высоты, у прямой призмы они равны между собой. 536. Не обязательно; необходимо еще, чтобы такая призма была прямой. 537. По определению перпендикуляра к плоскости. 538. Существует. На рис. 195 изображена наклонная треугольная призма, у которой только грань AA_1C_1C образует с основанием прямой двугранный угол. 539. В правильной четырехугольной призме AC_1 (рис. 196) диагональ DB_1 образует с боковыми гранями AA_1B_1B и BB_1C_1C углы AB_1D и DB_1C ; конгруэнтность этих углов следует из конгруэнтности прямоугольных треугольников AB_1D и DB_1C .

540. $\sqrt{7} \approx 2,64$ см. Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники AB_1D и B_1AB (рис. 196). 541. Проекция искомой диагонали — меньшая диагональ ромба — равна $2a \sin \frac{\alpha}{2}$. Диагональ

призмы равна $\frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta}$. 542. 76° и 104° . Указание. Во всякой прямой призме углы ее основания являются линейными углами

двугранных углов, образованных смежными боковыми гранями. 543. 1. *Параллелепипедом* называется призма, в основании которой лежит параллелограмм. 2. Параллелепипед, ребра которого перпендикулярны плоскостям оснований, называется *прямым*. 3. *Прямоугольным параллелепипедом* называется прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник. Кирпичи, ящики, комнаты и другие предметы имеют форму прямоугольного параллелепипеда. 4. Все шесть граней наклонного параллелепипеда — параллелограммы. У прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы. У прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники. 5. а) Противоположные грани параллелепипеда попарно параллельны и конгруэнтны; б) середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии. 6. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. 7. а) У прямого параллелепипеда диагонали имеют попарно равные длины; б) у прямоугольного параллелепипеда все диагонали имеют равные длины. 544. 1. Прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны между собой, называется кубом. 2. $a\sqrt{3}$. 3. Могут образоваться сечения следующих видов: а) равнобедренный треугольник; б) равнобедренная трапеция; в) прямоугольник. 545. Если a — ребро куба, то $a\sqrt{2}$ — диагональ боковой грани. Сечение представляет собой прямоугольник, площадь его $a^2\sqrt{2}$; по условию, $a^2\sqrt{2}=36\sqrt{2}$, откуда ребро куба $a=6$ см. 546. $\frac{1}{2}d$. У к а з а н и е. Провести диагональное сечение через данную диагональ. 547. Если меньшая сторона основания x (см), то большая его сторона равна $x+5$ (см), а диагональ равна $x+10$ (см). Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений, поэтому $(x+10)^2 = x^2 + (x+5)^2 + 8^2$, откуда $x=11$ см, т. е. стороны оснований равны 11 и 16 см, а диагональ — 21 см. 548. *Площадью поверхности многогранника* называется сумма площадей всех его граней. 2. *Площадью боковой поверхности призмы* называется сумма площадей ее боковых граней. 3. *Площадь поверхности призмы* равна сумме боковой поверхности и площади двух ее оснований. В виде формулы это можно записать так: $S_{\text{пр}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. 549. Потому что параллелепипед — это один из видов призмы. 550. 1) $3aH + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}H$;

2) $4aH + 2a^2 = 2a(2H + a)$; a^2H ; 3) $6aH + 3a^2\sqrt{3} = 3a(2H + a\sqrt{3})$;

$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}H$. 551. Угол α между диагональю призмы B_1D и боковой гранью AA_1B_1B — это угол между $[B_1D]$ и ее проекцией AB_1 на эту грань. Треугольник AB_1D прямоугольный, так как $[AD] \perp [AB]$, следовательно, $[AD] \perp [AB_1]$ (по теореме о трех перпендикулярах). Из этого треугольника: $|AD| = \frac{1}{2}d$; $|AB| = |AD| = \frac{1}{2}d$; $|AB_1| =$

$= d \cos 30^\circ = \frac{1}{2}d\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника AB_1B , по

теореме Пифагора, $|BB_1| = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$. Площадь боковой поверхности

призмы $S_{бок} = 4 \cdot \frac{1}{2} d \cdot \frac{1}{2} d \sqrt{2} = d^2 \sqrt{2}$; объем $V = \left(\frac{1}{2} d\right)^2 \frac{1}{2} d \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} d^3$. 552. Обозначим сторону основания призмы через a , ее

высоту — через H , тогда $S_{бок} = 4aH$, диагональ основания $d = a\sqrt{2}$. Но, по условию, $dH = F$, или $a\sqrt{2}H = F$ и $aH = \frac{F}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

но, $S_{бок} = 4 \cdot \frac{F}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}F$. 553. $96\sqrt{3}$ дм². Указание. Высота

основания равна 6 дм. Сторона основания $4\sqrt{3}$ см; $S_{осн} = 12\sqrt{3}$ см²;

$S_{бок} = 72\sqrt{3}$ см². 554. 1. Пусть O — центр правильного треугольника ABC , AP , BM и CN — его высоты (медианы). Докажем, что ребра BB_1 и CC_1 , будучи наклонными к плоскости треугольника ABC , в то же время перпендикулярны стороне BC , т. е. грань BB_1C_1C — прямоугольник. Действительно, $[BC] \perp [AP]$, но $[AP]$ — продолжение проекции $[AO]$ наклонной $[AA_1]$, следовательно, $[BC] \perp [AA_1]$, $[BB_1] \parallel [AA_1]$ и $[CC_1] \parallel [AA_1]$, поэтому $[BC] \perp [BB_1]$ и $[BC] \perp [CC_1]$. A_1M и A_1N — высоты двух других боковых граней; каждую из этих высот можно найти из конгруэнтных прямоугольных треугольников A_1AM и A_1AN . Окончательно: $S_{бок} = 2|AC| \cdot |A_1N| + |BC| \cdot |BB_1| = 3,7$ (м²). 2. Решается так же, как и предыдущая. Площадь грани BB_1C_1C равна ab (см. рис. 65). Площадь каждой из двух других

граней $ab \sin \alpha$. Окончательно: $S_{бок} = 2ab \sin \alpha + ab = 2ab \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \right) =$

$= 4ab \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$. 555. В 20³ раз. 556. Объем бол-

ванки $V = 8000$ см³, площадь листа $S = V : H = 8000$ см²: 1 мм = 0,008 м²: 0,001 м = 8 м². 557. Длина коробки 120 см = 12 дм, ширина 5 дм, а высота 1 дм; объем ее 60 дм³. 558. Основание параллелепипеда —

ромб, площадь которого $S = a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$, высота параллелепи-

педа равна a (ведь параллелепипед прямой), поэтому $V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$.

559. $|AB| = |AA_1| \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{10}{3} \sqrt{3}$ дм, $|AC| = |AB| \cos 30^\circ = \frac{10}{3} \sqrt{3} \times$

$\times \frac{1}{2} \sqrt{3} = 5$ дм, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{25}{6} \sqrt{3}$ дм²; $V = S_{осн} H = \frac{25}{6} \sqrt{3} \cdot 10 \approx 72$ дм³. 560. Диагональ осно-

вания $|BD| = h\sqrt{2}$, площадь трапеции $S = \frac{1}{2} |BD| |AC| \sin 90^\circ$

(см. 452) или $S = h^2$, высота призмы также равна $h\sqrt{2}$; $V = h^3 \sqrt{2}$.

561. Площадь основания находим по формуле Герона: $S = \sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = 15\sqrt{3}$ см². $H_{пр} = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ см; $V = 15 \cdot \sqrt{3} \times$

$\times 4\sqrt{3} = 180 \text{ см}^3$. 562. Объем прямоугольного параллелепипеда AC_1 $V = |AD| \cdot |AB| \cdot |BB_1|$. Из прямоугольных треугольников BAD и B_1BD имеем:

$$|AB| = a \operatorname{tg} \alpha, \quad |BD| = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad |BB_1| = |BD| \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}.$$

Отсюда $V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$. З а м е ч а н и е. Объем параллелепипеда можно найти и по формуле

$$V = S_{\text{осн}} H; \quad S_{\text{осн}} = 2S_{\triangle ABD} = 2|AD| \cdot |BD| \sin \alpha = a^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

563. Диагональ основания этого параллелепипеда $d = h \operatorname{ctg} \alpha$. Площадь основания $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \beta$ (см. 452) или $S = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin \beta$; $V =$

$$= \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin \beta \quad 564. \quad |CD| = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad S_{\text{осн}} = \frac{h^2}{\sin \alpha}, \quad |A_1E| = l \sin \varphi;$$

$$V = \frac{h^3 l \sin \varphi}{\sin \alpha}. \quad 565. \quad 1. \text{ Треугольная пирамида называется тетраэдром.}$$

У такой пирамиды четыре грани, четыре вершины и шесть ребер. 2. Плоскость, проведенная через боковое ребро и диагональ основания пирамиды, называется *диагональной*, а полученное сечение — *диагональным* (на рис. 70 ASC — диагональное сечение). 3. Восемь: четыре при сторонах основания и четыре при боковых ребрах. 566. 1. Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания. 2. Апофемой правильной пирамиды называется *высота ее боковой грани*. З а м е ч а н и е.

Если пирамида неправильная, то высоту боковой грани нельзя назвать апофемой. 3. Нет, ибо тогда величина каждого из шести плоских углов при вершине равна 60° , а сумма величин плоских углов при вершине многогранного угла должна быть меньше 360° . 4. На рис. 197 β — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, α — угол наклона боковой грани к этой плоскости,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|SO|}{|OA|}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|SO|}{|OM|}, \quad \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta = |OA| : |OM| = 2 \quad \text{Следовательно,}$$

$$\alpha > \beta. \quad \text{Для правильной четырехугольной пирамиды } \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}.$$

5. На рис. 197 $[CD] \perp [AS]$ и $[BD] \perp [AS]$, $\widehat{CDB}$ — линейный угол двугранного угла между гранями CSA и BSA . 567. 1) Проекция всех боковых ребер этой пирамиды конгруэнтны (см. рис. 186), поэтому высота проходит через центр круга, описанного около основания (см. 490); 2) в основании этой пирамиды может быть лишь такой четырехугольник, около которого можно описать окружность, например прямо-

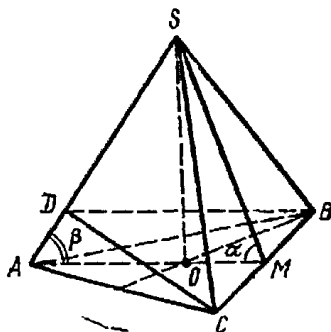


Рис. 197

утольник, квадрат и равнобедренная трапеция (сумма противоположных углов этих четырехугольников равна 180°). 568. 1. Если в пирамиде $SABCD$ (см. рис. 71) $\angle SEO \cong \angle SFO \cong \dots$, то $\triangle SOE \cong \triangle SOF$ (по катету и острому углу) и $|OE| = |OF| = \dots$, т. е. точка O на одинаковом расстоянии от сторон основания и является центром вписанного круга; 2) в основании этой пирамиды может быть лишь такой четырехугольник, в который можно вписать окружность, например ромб, квадрат, и такая трапеция, у которой сумма оснований равна сумме боковых сторон. 569. У такой пирамиды боковые ребра конгруэнтны, а также конгруэнтны высоты боковых граней. Следовательно, высота пирамиды должна проходить как через центр круга, описанного около основания, так и вписанного в него; таким четырехугольником, у которого совпадают центры вписанной и описанной окружностей, является лишь квадрат. 570. 1) Остроугольный треугольник; 2) тупоугольный треугольник, так как центр описанного круга лежит вне этого треугольника; 3) прямоугольный треугольник, так как центр круга, описанного около него, лежит на середине его гипотенузы. 571. Обозначим сторону основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 197) через a , тогда высота SO этой пирамиды также равна a (по условию), радиус R описанного круга $|AO| = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (из формулы $a = R\sqrt{3}$). Если обозначить иско-

мый угол через β , то $\operatorname{tg} \beta = \frac{|SO|}{|AO|} = a : \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, откуда $\beta = 60^\circ$.

572. В пирамиде $SABCD$ $|OK| = 12$ см, $\widehat{SFO} = 30^\circ$, $|OF| = 24$ см, $|AD| = 48$ см. 573. 1. Нужно вычислить площадь каждой боковой грани, а затем найти их сумму. 2. Площадь поверхности пирамиды вычисляют по формуле $S_{\text{пир}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$. 574. 1. В пирамиде $SABCD$ (см. рис. 71) высоты боковых граней конгруэнтны: $|SE| \cong |SF| = \dots$,

площадь ее боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} |SE|$. Обозначим радиус круга, вписанного в основание, через r , тогда из треугольника SOE $|SE| = \frac{r}{\cos \alpha}$ и $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \frac{r}{\cos \alpha}$, но $\frac{1}{2} P_{\text{осн}} r = S$ (см. 450. 1).

Отсюда $S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos \alpha}$; 2. В два раза. 575. Апофема пирамиды равна 15 см. $S_{\text{пир}} = 736$ см². 576. ≈ 25 листов. Указание. $S_{\text{бок}} = \frac{16}{\cos 45^\circ} = 16\sqrt{2}$ см² (см. формулу 574); 10% от $S_{\text{бок}}$ составляет

$1,6\sqrt{2}$ м². 577. $\frac{8}{3} h^2$. 578. Из центра основания O опустим перпендикуляр на грань SDC (см. рис. 72) — он пересечет апофему: по условию, $|OK| = d$ из прямоугольного треугольника OKF $|OF| = \frac{d}{\sin \alpha}$; сторона основания $|AD| = \frac{2d}{\sin \alpha}$; $\widehat{SOK} = \widehat{SFO} = \alpha$. Из тре-

угольника OSK $|OS| = \frac{d}{\cos \alpha}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} |AD|^2 |OS| = \frac{1}{3} \left(\frac{2d}{\sin \alpha} \right)^2 \frac{d}{\cos \alpha} = \frac{8d^3}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}$. 579. Обозначим сторону основания

пирамиды через a , тогда апофема равна $2a$; $S_{\text{бок}} = 4a \cdot \frac{1}{2} 2a = 4a^2$. Из треугольника SDM имеем $|SD|^2 = |SM|^2 + |DM|^2$ или $16 = 4a^2 + \frac{a^2}{4}$,

откуда $a^2 = \frac{64}{17}$; тогда $S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{64}{17} \approx 15 \text{ см}^2$. 580. Обозначим сторону

основания пирамиды через a , тогда $|DM| = |OM| = \frac{a}{2}$ (см. рис. 73).

Апофема $|SM| = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Пусть искомый угол $\angle SMO = x$, тогда

$$\cos x = \frac{|OM|}{|SM|} = \frac{a}{2} : \left(\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad x = \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (0 < \alpha < 90^\circ).$$

581. Боковая поверхность этой пирамиды равна сумме площадей трех конгруэнтных прямоугольных равнобедренных треугольников, катеты которых равны a . Площадь одного из них равна $\frac{1}{2} a^2$, площадь боковой

поверхности пирамиды равна $1,5 a^2$. 582. *Указание.* Сторона сечения является средней линией основания и равна a . Сторона основания равна $2a$, апофема пирамиды равна b . 583. По условию, $|AD| = |AS| = |SD| = a$. Сторона основания равна $\frac{a}{2}$, а его

площадь $S = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$; объем пирамиды $V = \frac{3a^3}{16}$. 584. Сперва найдем

объем $\frac{1}{6}$ части искомой пирамиды, т. е. пирамиды $SODE$ (см. рис. 74).

Площадь ее основания $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, высота пирамиды $H = a \operatorname{tg} \alpha$, ее

объем $V_1 = \frac{a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{12}$, объем шестиугольной пирамиды $V = 6V_1 =$

$= \frac{a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2}$. 585. По теореме Пифагора находим, что $|SC| = |SA| =$

$= 15 \text{ см}$. По условию, $[DC] \perp [BC]$, следовательно, $[DC] \perp [SC]$ (теорема о трех перпендикулярах); $\triangle BSC \cong \triangle ASB$ и $\triangle DSC \cong \triangle ASD$ —

по гипотенузе и катету; $S_{\text{бок}} = 288 \text{ см}^2$; $S_{\text{шир}} = 432 \text{ см}^2$. 586. $\frac{1}{6} abc$.

Указание. Одну из боковых граней принять за основание пирамиды. 587. 1. $\frac{1}{6}$ часть; площадь основания этой пирамиды в два раза

меньше площади основания параллелепипеда, а высота у них общая. 2. Площадь основания отсеченной части равна $\frac{1}{8} a^2$, высота $\frac{a}{2}$,

объем отсеченной пирамиды равен $\frac{1}{48} a^3$. 588. 1. Отношение высот

пирамид равно 2, а отношение площадей оснований равно 4, следовательно, объем отсеченной пирамиды в 8 раз меньше объема данной.

2 Объем увеличится в 3 раза. 589. 270 м³. Указание. Высота этой пирамиды равна 15 см. 590. $\frac{1}{6} l^3 \sin 2\alpha \sin 2\varphi \cos \varphi$. Указание. Высота этой пирамиды проходит через центр круга, описанного около основания (см. 490), т. е. проходит через середину гипотенузы прямоугольного треугольника, лежащего в основании. По при-

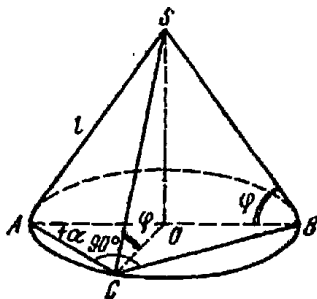


Рис. 198

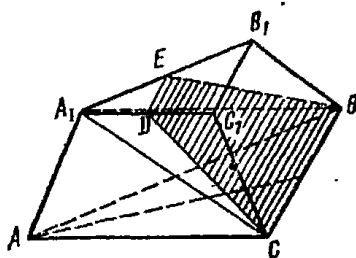


Рис. 199

знаку перпендикулярности двух плоскостей грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания (рис. 198). 591. 1. Потому что при гомотетии с центром в вершине полной пирамиды одно основание можно отобразить на другое. 2. Если две параллельные плоскости (основания и сечение пирамиды) пересечены третьей (боковой гранью), то линии пересечения параллельны, поэтому стороны параллельного сечения пирамиды параллельны соответствующим сторонам основания. 3. Так как правильная усеченная пирамида составляет часть правильной пирамиды, у последней боковые грани — конгруэнтные равнобедренные треугольники. 4. Такую форму имеют ящики для цветов, бетонные пирамиды, которыми перекрывают русла рек, колпаки, устанавливаемые над кузнечным горном для улавливания и отвода продуктов сгорания, и др. 5. Если данная точка совпадает с противоположной вершиной верхнего основания, то сечение — треугольник, в других случаях сечение — трапеция (рис. 199). 6. Трапеции. 592. 6 дм². Указание. Для построения линейного угла при основании надо провести $[O_1M] \perp [D_1C_1]$ и

$[ON] \perp [DC]$, тогда $\angle ONM = 60^\circ$. Для вычисления апофемы $|MN|$ надо в плоскости трапеции OO_1MN опустить перпендикуляр $[MP]$ на $[ON]$.

593. По условию, высота пирамиды $|MP| = \sqrt{ab}$ (см. рис. 77); проекция апофемы $|PN| = \frac{a-b}{2}$, апофема $|MN| = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (\sqrt{ab})^2} =$

$\frac{a+b}{2}$; тогда $S_{\text{бок}} = \frac{4a+4b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = (a+b)^2$; $S_{\text{ус. пир}} = (a+b) + a^2 + b^2 = 2(a^2 + ab + b^2)$. 594. Периметр большего основания этой усеченной пирамиды равен $3a\sqrt{2}$, периметр меньшего основания — $\frac{3}{2}a\sqrt{2}$, апофема равна $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \left(3a\sqrt{2} + \frac{3}{2}a\sqrt{2} \right) \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{8}a^2$.

595. 1. Центр симметрии цилиндра находится в середине отрезка,

соединяющего центры оснований. 2. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, две стороны которого служат образующими цилиндра, а две другие — диаметры кругов, лежащих в основаниях цилиндра. 3. Цилиндр называется равносторонним, если его осевое сечение — квадрат. 4. Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, параллельная оси цилиндра и отстоящая от нее на расстоянии, равном радиусу основания.

Эта плоскость имеет с поверхностью цилиндра только одну общую прямую (рис. 200). 596. 1 Призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основанием служит многоугольник, вписанный в его основание, а высота ее равна высоте цилиндра. 2. Нет. Только прямую треугольную призму можно вписать в цилиндр. 3. Нет. Основанием вписанной призмы должен быть четырехугольник, сумма противоположных углов которого равна 180° . 4. Призма называется *описанной около цилиндра*, если ее основание — многоугольник, описанный около основания цилиндра, а высоты их равны. 597. Нет. Наибольший квадрат, который можно вписать в данный круг (сечение ствола шахты), может иметь сторону, равную

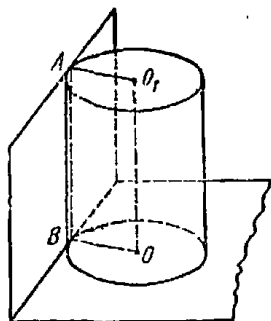


Рис. 200

лишь $2,5\sqrt{2} \approx 3,53$ м. 598. 1. Прямоугольник, основание которого равно длине окружности основания цилиндра; высота прямоугольника равна высоте цилиндра. Площадь этой развертки равна площади боковой поверхности цилиндра, т. е. $2\pi RH$. 2. $S_{\text{бок. ц}} = 2\pi RH$;

$S_{\text{ос. сеч}} = 2RH$; $\frac{S_{\text{бок. ц}}}{S_{\text{ос. сеч}}} = \frac{2\pi RH}{2RH} = \pi$, т. е. приблизительно в три раза.

599. πa^2 . 600. Пусть радиус основания первой детали R , а высота ее H , тогда радиус основания второй детали $2R$ и высота ее равна $\frac{H}{2}$. Площадь боковой поверхности первой детали $S_1 = 2\pi RH$, а вто-

рой $S_2 = 2\pi (2R) \frac{H}{2} = 2\pi RH$, т. е. площади боковых поверхностей их

равны. Площадь поверхности первой детали равна $2\pi RH + 2\pi R^2$, а второй $2\pi RH + 2\pi (2R)^2 = 2\pi RH + 8\pi R^2$. Таким образом, площадь поверхности второй детали больше: на нее будет израсходовано и больше краски. 601. Диагональное сечение вписанного параллелепипеда AC_1 — прямоугольник AA_1C_1C , основание которого равно диаметру цилиндра $2R$, а высота H у них общая, площадь диагонального сечения равна $2RH$, отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади диагонального сечения равно π . 602. $V_{\text{ц}} =$

$\frac{\pi D^2}{4} H$. 603. Если обозначить радиус основания второго цилиндра через R , а его высоту через H , то объем второго цилиндра будет $\pi R^2 H$, а объем первого цилиндра будет $\pi (2R)^2 \cdot \frac{H}{3} = \frac{4}{3} \pi R^2 H$; отно-

шение объема первого цилиндра к объему второго равно $\frac{4}{3}$.

604. 1) $2Q$; 2) $2\pi Q$; 3) $\pi Q\sqrt{Q}$. 605. Объем данного прямоугольного

параллелепипеда $V = 1 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \text{ м}^3$. Такой же объем имеет проволока, представляющая собой цилиндр, радиус основания которого $R = 0,001 \text{ м}$, а высота l неизвестна. Но $V = \pi R^2 l$, откуда $l = \frac{V}{\pi R^2} =$

$$= \frac{0,04}{\pi \cdot 0,001^2} \approx 12,7 \text{ км. 606. } S_{\text{бок}} = 0,5 \pi d^2 \sin 2\alpha; V = \frac{1}{8} \pi d^3 \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

607. 1) Два конуса с общим основанием. Радиус этого основания равен длине перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла

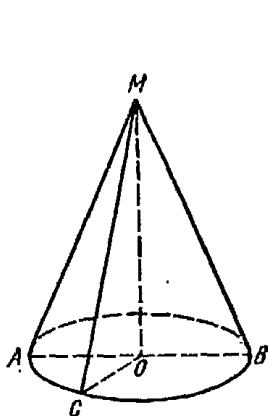


Рис. 201

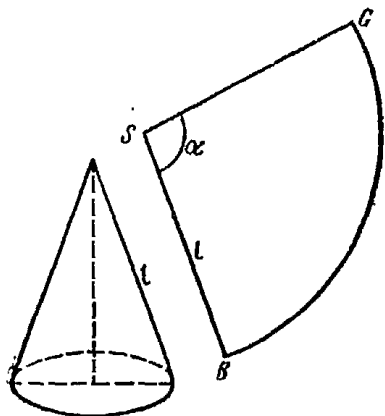


Рис. 202

на гипотенузу; 2) два равных конуса с общим основанием. 608. 1. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник AMB (рис. 201), боковые стороны которого AM и MB служат образующими конуса, а основание AB — диаметром основания конуса. 2. Конус называется *равносторонним*, если его осевое сечение — равносторонний треугольник. 609. 1. *Пирамида называется вписанной*, если ее основание есть многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса; боковые ребра вписанной пирамиды расположены на боковой поверхности конуса. *Пирамида называется описанной*, если основание — многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. 2. Нет. В конус можно вписать только такую пирамиду, боковые ребра которой равны между собой. 610. Сектор SBC (рис. 202), у которого длина дуги BC равна длине окружности основания, а радиус SB равен образующей конуса. 611. 1. Длина дуги BC сектора SBC (рис. 202) равна $\frac{\pi \alpha}{180^\circ}$, в то же время она равна $2\pi R$ — длине

окружности основания конуса, т. е. $\frac{\pi \alpha}{180^\circ} = 2\pi R$, откуда $\alpha = \frac{360^\circ R}{l}$.

2. У равностороннего конуса образующая l равна диаметру основания $2R$, поэтому $\alpha = \frac{360^\circ R}{2R} = 180^\circ$. 612. У отсеченного конуса радиус

основания вдвое меньше радиуса основания данного конуса, в таком же отношении и разделена образующая, площадь боковой поверхности

отсеченного конуса составляет $\frac{1}{4}$ площади боковой поверхности данного конуса, т. е. равна 10 дм^2 . Площадь боковой поверхности другой части конуса равна 30 дм^2 . 613. У равностороннего конуса образующая l равна диаметру основания, т. е. $l=2R$, поэтому $S_{\text{бок.к}} = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$, а $S_{\text{кон}} = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$ и $S_{\text{кон}}:S_{\text{бок}} = 3:2$. 614. $7,54 \text{ дм}^2$. У к а з а н и е. Нужно вычислить полную поверхность конуса, полученного от вращения этого треугольника вокруг меньшего катета, равного $\sqrt{96} \text{ см}$. 615. 1. В четыре раза. 2. Если радиус основания конуса обозначить через R , его высоту H , искомый увеличенный радиус через R_1 , то объем прежнего конуса $\left(\frac{1}{3} \pi R^2 H\right)$ должен быть равен объему нового $\left(\frac{1}{3} \pi R_1^2 \cdot \frac{H}{2}\right)$, поэтому $\frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{6} \pi R_1^2 H$, откуда $R_1 = R\sqrt{2}$, т. е. радиус основания R надо уве-

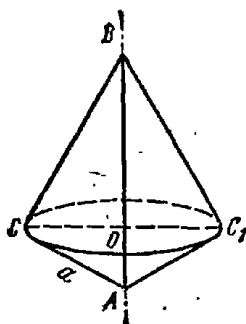


Рис. 203

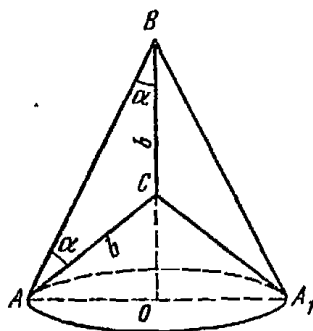


Рис. 204

личить в $\sqrt{2} \approx 1,4$ раза. 616. Тело состоит из двух конусов ACC_1 и BCC_1 (рис. 203) с общим основанием; объем тела вращения $V = \frac{1}{3} \pi |CO|^2 \cdot |AO| + \frac{1}{3} \pi |CO|^2 \cdot |OB| = \frac{1}{3} \pi |CO|^2 (|AO| + |OB|) = \frac{1}{3} \pi |CO|^2 \cdot |AB| = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a = \frac{1}{2} \pi a^3$. 617. $S_{\text{бок}} = \pi l^2 \cos \alpha$; $S_{\text{полн}} = \pi l^2 \cos \alpha + \pi l^2 \cos^2 \alpha = \pi l^2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha) = 2\pi l^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; $V = \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \pi l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$. 618. Объем тела вращения состоит из разности объемов конусов BAA_1 и CAA_1 (рис. 204), или $V = \frac{1}{3} \pi |AO|^2 |BO| - \frac{1}{3} \pi |AO|^2 |CO| = \frac{1}{3} \pi |AO|^2 (|BO| - |CO|) = \frac{1}{3} \pi |AO|^2 b$. По отношению к треугольнику ABC $\angle ACO$ — внеш-

ний, поэтому $\widehat{ACO} = 2\alpha$. Из треугольника ACO имеем $|AO| = b \sin 2\alpha$, поэтому $V = \frac{1}{3} \pi (b \sin 2\alpha)^2 b = \frac{1}{3} \pi b^3 \sin^2 2\alpha$. Поверхность тела вращения состоит из суммы боковых поверхностей этих же конусов, или $S = \pi |AO| (|AB| + |AC|)$. Затем находим $|AB| = 2b \cos \alpha$ и

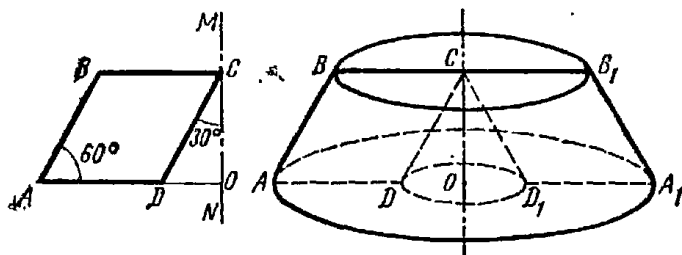


Рис. 205

$$S = \pi b^2 \sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1); \quad 1 + 2 \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha \right) = 2 (\cos 60^\circ + \cos \alpha) = 4 \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right). \quad \text{Окончательно: } S = 4\pi b^2 \sin 2\alpha \times \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся считают, что поверхность тела вращения представляет собой не сумму боковых поверхностей двух конусов, а их разность; в ошибочности этого можно убедиться, если, например, окрасить это тело. 619. Осевое сечение — равнобедренная трапеция, у которой основания $2R$ и $2r$, а высота $R - r$. Площадь сечения равна $R^2 - r^2$. 620. $2l^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 621. $S_{\text{бок}} = 2\pi R_{\text{оп}} l$. 622. Площадь $S = \frac{\pi}{2} (4a + l\sqrt{2})$. 623. Поверхность тела вращения равна сумме четырех поверхностей, полученных вращением сторон ромба AB , BC , CD и AD вокруг оси MN (рис. 205):

$$S_{\text{пр } AB} = \pi (|BC| + |AO|) |AB| = \pi \left(a + \frac{3}{2} a \right) a = \frac{5}{2} \pi a^2;$$

$$S_{\text{вр } BC} = \pi |BC|^2 = \pi a^2; \quad S_{\text{вр } CD} = \pi |OD| \cdot |DC| = \pi \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \pi a^2;$$

$$S_{\text{вр } AD} = \pi (|AO|^2 - |OD|^2) = \pi \left[\left(\frac{3}{2} a \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 2\pi a^2; \quad S = 6\pi a^2.$$

624. $S_{\text{бок}} = \pi (R + r) l$. На рис. 206 представлено осевое сечение данного усеченного конуса. Из треугольника BED $|ED| = R + r = d \cos \alpha$, из треугольника ABD $|AB| = l = d \tan \alpha$; $S_{\text{бок}} = \pi d^2 \cos \alpha \tan \alpha = \pi d^2 \sin \alpha$. 625. 1. Сферой называется поверхность, образованная вращением полуокружности вокруг ее диаметра. 2. а) Шаром называется тело, полученное вращением полукруга вокруг своего диаметра; б) шаром

* $S_{\text{вр } AB}$ — поверхность, полученная вращением AB .

называется множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки не больше $R > 0$, 3. Всякое сечение шара плоскостью есть круг, радиус которого можно вычислить по формуле $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, d — расстояние секущей плоскости от центра. Это сечение — точка, если расстояние от центра

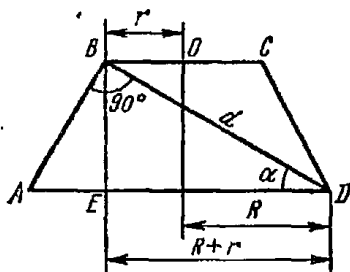


Рис. 206

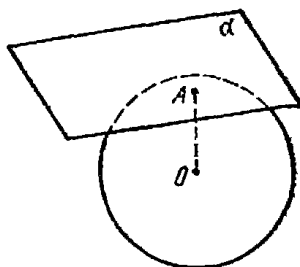


Рис. 207

шара до плоскости сечения равно радиусу. 4. Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется *касательной плоскостью*. 5. Если плоскость проходит через конец радиуса, лежащий на сфере, и перпендикулярна ему, то она является *касательной плоскостью*. На рис. 207 AO — радиус сферы, точка A принадлежит сфере и плоскость $\alpha \perp [OA]$; в этом случае α — касательная плоскость.

Обратная теорема. Если провести радиус сферы в точку касания, то он будет перпендикулярен касательной плоскости, т. е. если α — касательная плоскость, A — точка касания, то радиус $AO \perp \alpha$, или короче: для того чтобы плоскость была касательной к сфере, необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярна диаметру сферы и проходила через его конец. 626. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

$R^2 = 2^2 + 1^2 + (-3)^2 = 14$, уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, 627. $\frac{\sqrt{3}}{3} R$;

$\frac{2\sqrt{3}}{3} R$. 628. $\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. У к а з а н и е. Данный треугольник

вписан в малый круг шара. Искомое расстояние равно длине отрезка, соединяющего центр шара с серединой гипотенузы, 629. 1. $S_{\text{сф}} = 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 =$

$= \pi D^2$; $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$. 2. С недостатком, так как $\frac{1}{2} < \frac{1}{6}$.

630. Площадь полусферы равна $2\pi R^2$, полная поверхность ее равна $3\pi R^2$. 631. 200 г. 632. 1) Площади двух сфер относятся, как квадраты диаметров, следовательно, площади этих сфер относятся, как 9:1; 2) объемы двух шаров относятся, как кубы диаметров, следовательно, объемы этих шаров относятся, как 27:1. 633. Отношение объемов этих спутников: $58^3/16^3 = (58/16)^3 = (29/8)^3 = 3,625^3 \approx 48$ раз.

634. $V_{\text{ш}} = \pi r^2 \cdot 2r = 16\pi$ (см³). Если радиус шара R , то $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$;

$\frac{4}{3} \pi R^3 = 16\pi$, отсюда $R = \sqrt[3]{12} \approx 2,3$ см. 635. Пусть a — ребро куба, тогда его объем $V = a^3$, а его полная поверхность $6a^2$. Площадь

сферы радиуса R равна $4\pi R^3$. По условию, $4\pi R^3 = 6a^3$, откуда $R^3 = \frac{6a^3}{4\pi}$, $R = \frac{a}{2} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$; $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = a^3 \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \approx 1,38a^3$, т. е. объем шара приблизительно в 1,38 раза больше объема куба. 636. Радиус вписанного шара равен $\frac{a}{2}$; радиус описанного шара составляет поло-

вину диагонали куба, он равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 637. Обозначим радиус шара

через R , тогда ребро куба равно $2R$; объем шара равен $\frac{4}{3} \pi R^3$, а куба — $(2R)^3 = 8R^3$. Процентное отношение этих объемов: $\left(\frac{4}{3} \pi R^3 : 8R^3\right) \cdot 100\% \approx 52,3\%$. 638. Центр шара расположен в точке

пересечения диагоналей параллелепипеда. Радиус шара составляет половину такой диагонали и равен 3,5 см. 639. 96 см³. У к а з а н и е. Провести через центр шара плоскость, параллельную основанию призмы, тогда в сечении получится большой круг шара, вписанный

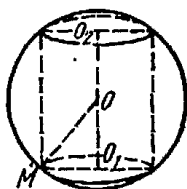


Рис. 208

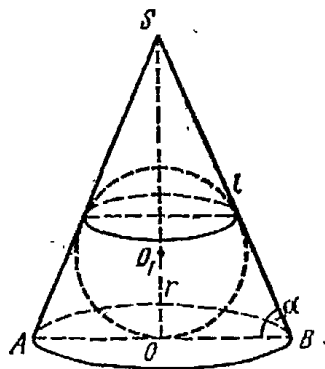


Рис. 209

в прямоугольный треугольник, конгруэнтный основанию. Радиус шара находится по формуле $r = \frac{S}{p}$. Высота призмы равна $2r$. 640. $2\pi r^2$.

У к а з а н и е. Шар можно вписать лишь в такой цилиндр, у которого диаметр основания равен высоте цилиндра. 641. Центр O описанного шара (рис. 208) находится на середине высоты цилиндра. Радиус шара OM равен расстоянию от O до любой точки окружности основания цилиндра. Из прямоугольного треугольника OO_1M найдем $|OM|^2 = r^2 + (2r)^2 = 5r^2$, тогда $S = 4\pi |OM|^2 = 20\pi r^2$. 642. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Высота конуса

$H = l \frac{\sqrt{3}}{2}$, радиус шара $R = \frac{1}{3} H = \frac{\sqrt{3}}{6} l$; объем шара $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} l\right)^3 = \frac{\pi \sqrt{3}}{54} l^3 \approx 0,1 l^3$. 643. Радиус основания конуса

$|OB| = R = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (рис. 209), образующая $l = \frac{|OB|}{\cos \alpha} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$;

$$S_{\text{полн}} = \pi R (l + R) = \pi r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \times \\ \times \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

644. На рис. 210 дано осевое сечение шара, описанного около равностороннего конуса, — равносторон-

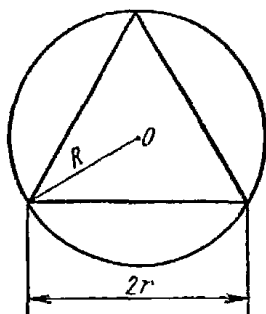


Рис. 210

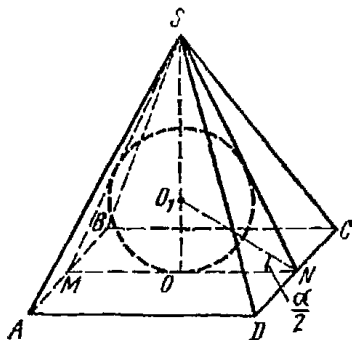


Рис. 211

ный треугольник, вписанный в окружность большого круга шара. Сторона этого треугольника $a_3 = R\sqrt{3}$, где R — радиус шара. Но, по условию, $a_3 = 2r$, поэтому $2r = R\sqrt{3}$, откуда $R = \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $S =$

$$= 4\pi \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} \right)^2 \approx 16,8 r^2.$$

645. Окружность большого круга этого шара вписана в равнобедренный треугольник SMN (рис. 211), боковые стороны которого SM и SN — апофемы пирамиды, а основание MN равно стороне ее основания AD . Из треугольника SON $|SN| = 25$ см.

Радиус вписанного круга вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника SMN , а p — его полупериметр, $r = 5,25$ см. Площадь поверхности шара $S \approx 346$ см². 646. Окружность большого круга этого шара вписана в равнобедренный треугольник SMN (рис. 211), радиус шара $|OO_1| = r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 =$
 $= \pi a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$

Ответы к экзаменационным билетам

Здесь указано, где можно найти ответы на первые два вопроса билетов в действующих ныне учебных пособиях по математике. Например, ответы на билет 1 надо понимать так:

1. Геометрия, 6-й класс, под редакцией А. М. Колмогорова. Пункт 34.

2. Алгебра, 8-й класс, под редакцией А. И. Маркушевича. Пункт 41.

Б.1. 1. Г.6, п. 34. 2. А.8, п. 41. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. 0,001.

Б.2. 1. Г.6, п. 33, п. 40. 2. А.8, п.21. А.10, п. 84. 3. 0,5. 4. Рис. 212.

Б.3. 1. Г.7, п. 52, п. 53. 2. А.8, п. 41. 3. $x=2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, 4. $\sqrt[4]{x}$.

Б.4. 1. Г.7, п. 54. 2. А.8, п. 38, п. 39. 3. $\sqrt{3}$. 4. $\frac{5}{3}$.

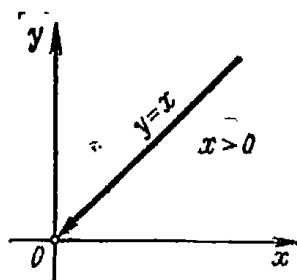


Рис. 212

Б.5. 1. Г.7, п. 85 — п. 87. 2. А.8, п. 14 и п. 16. 3. 1. 4. [0; 1].

Б.6. 1. Г.8, п. 117. 2. А.8, п. 40. А.10, п. 111. 3. 1. 4. 24, 75.

Б.7. 1. Г.6, п. 38. 2. А.8, п. 17; п. 19. 3. -2. 4. 25.

Б.8. 1. Г.7, п. 88. 2. А.9, п. 68 и А.10, п.3, материал для повторения.

3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Б.9. 1. Г.6, п. 23. 2. Г.8, п. 109, п. 112. 3. 5. $\sqrt[3]{5}$. 4. $\lg^2 \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} (2k+1)$.

Б.10. 1. Г.9, § 28. 2. А.7, п. 46, п. 48. 3. $y_{\min}=1; y_{\max}=9$. 4. 9,25.

Б.11. 1. Г.9, § 36. 2. А.10. Материал для повторения, п. 2. А.6, п. 18. 3. $1/4$. 4. 25.

Б.12. 1. Г.9, § 7. 2. А.7, п. 52. 3. -0,5. 4. Всегда $\sqrt{2} - \sin x > 0$, поэтому $2x - 3 < 0, x < 1,5$. Ответ: $]-\infty; 1,5[$.

Б.13. 1. Г.9, § 38, § 39. 2. А.10. Материал для повторения, п. 8. 4. $1/12$.

Б.14. 1. Г.9, § 37, § 6, § 24. 2. А.10, п. 121. 3. 2.4. Данное равенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \lg(xy) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ xy = 10, \end{cases}$$

следовательно, множество точек представляет собой ветвь гиперболы $y=10/x$, расположенную в первой координатной четверти.

Б.15. 1. Г.10, § 51. 2. А.7, п. 18, п. 19. 3. $\cos^2 x$. 4. 5.

Б.16. 1. Г.10, § 49. 2. См. решение № 77. 1). 3. 1. 4. 0,2.

Б.17. 1. Г.10, § 52. 2. А.6, п. 24, п. 7, п. 55. А.10, с. 185.

8. $x = \frac{\pi}{2} (2k+1), k \in \mathbb{Z}$. 4. 9.

Б.18. 1. Г.8, п. 107. 2. А.8, п. 33. А.10, п. 108. 3. $\sin 4\alpha$. 4. 4.

Б.19. 1. Г.10, § 56. 2. А.9, п. 24. 3. $\lg \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 4. 20.

Б.20. 1. Г.10, § 53. 2. А.9, п. 63. Г.8, п.102.

8. $]-\infty; -2[\cup]1,5; \infty[$. 17 см; 34π (см).

Б.21. 1. Г.10, § 53. 2. А.9, п. 63. Г.8, п. 102. 3. $]-\infty; 2[$. 4. 1.
Б.22. 1. Г.10, § 65. 2. Г.8, п. 102. 3. 100. 4. Луч $y=1$, если $x > -2$.

Б.23. 1. Г.10, § 67. 2. А.9, п. 64. А.10, п. 86. 3. Всегда $x^2 + 1 > 0$, отсюда $\log_{0,5} x > 0$. Ответ: $]0; 1[$. 4. $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Б.24. 1. Г.10, § 49. 2. А.9, п. 72. 3. 100. 4. Если $2\pi k -$

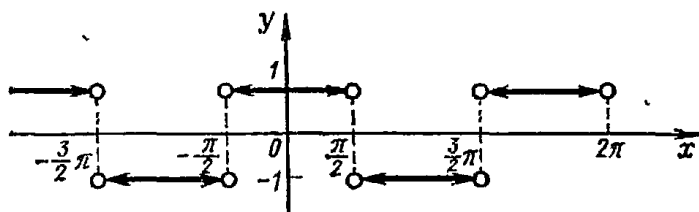


Рис. 213

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, то $y=1$, если $2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$; то $y=-1$ (рис. 213).

Б.25. 1. Г.8, п. 111. 2. А.9, п. 73. 3. $]-\infty; 1[$. 4. Отношение объема данного конуса к объему отсеченного равно 8:1, отношение объема усеченного конуса к объему отсеченного 7:1.

Б.26. 1. Г.10, § 49. 2. А.9, п. 74. 3. $f'(x)=5x-5$; $f'(1)=0$.
 $\operatorname{tg} \alpha = 0$. 4. $2\pi k - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Б.27. 1. Г.6, п. 38. 2. А.9, п. 74. 3. $-2 < x < 0, x \in [-2; 0]$.
4. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Б.28. 1. Г.6, п. 45. 2. А.9, п. 71. 3. $|1; \infty|$. 4. Если $x > 0$, то $y=1$; если $x < 0$, то $y=-1$.

Б.29. 1. Г.10, § 62. 2. А.9, п. 4. 4. $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ или $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$.

Б.30. 1. Г.10, § 64. 2. А.10, п. 90. 3. $2x^2 - 2x - 1 = 0$. 4. $y=1$.

Б.31. 1. А.9, п. 44. 2. Г.10, § 50. 3. Гипербола $y=1/x$, расположенная в I четверти. 4. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, если $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Б.32. 1. А.9, п. 65. А.10, п. 87. 2. А.9, п. 9. 3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{c}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \vec{b} - 2\vec{a} \vec{c} - 2\vec{b} \vec{c} = 1 + 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$.
4. $] -12; -10[$.

Б.33. 1. А.10, п. 87. 2. А.9, п. 55. 4. 6.

Б.34. 1. А.10, п. 85. 2. Г.6, п. 44. 3. $[1/3; 1]$. 4. $y = -\cos x + 1,5$.

Б.35. А.10, п. 86. 2. Г.7, п. 47. 3. $4/3$ кв. ед. 4. Равенство справедливо, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$.

Б.36. 1. Г.8, п. 113. 2. А.9, п. 5. 3. Парабола $y = x^2 + 1$. 4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Б.37. 1. Г.8, п. 114. 2. А.9, п. 54, теорема 3. 3. 0,8. 4. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Б.38. 1. Г.9, § 10. 2. А.9, п. 6. 3. $\frac{4}{3}$; $7\frac{1}{3}$. 4. $\frac{4r^3}{\sin \alpha}$.

Б.39. 1. А.9, п. 45. 2. Г.9, § 25, § 26. 3. см. рис. 214. 4. 0.

Б.40. 1. А.10, п. 75. 2. Г.9, § 20, § 21. 3. Возрастает в промежутках $]-\infty; -1[$ и $0; \infty[$, убывает в промежутке $]-1; 0[$. 4. 0.

Ответы на вопросы и задачи и устным экзаменам

1. 1) $(3 \cdot 125) \cdot 125 \cdot (8 \cdot 8) = 3 \cdot (125 \cdot 8) \cdot (125 \cdot 8) = 3000\,000$; 2) $12 \times (12,5 \cdot 8) \cdot 7 = 8400$; 3) $(217 - 216) \cdot (217 + 216) = 1 \cdot 433 = 433$; 4) $361 \times (2,78 + 7,22) - 261(5,64 + 4,36) = 1000$.

2. 1) Таких чисел можно указать бесконечное множество; можно, например, взять среднее арифметическое

данных чисел $\frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$; 2) например, $\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{7}{16}$; 3) $\left(\frac{4}{7} + \frac{5}{8}\right) : 2 = \frac{67}{112}$.

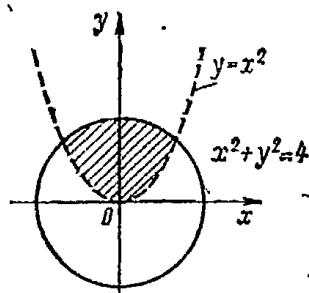


Рис. 214

3. 1) $\frac{1}{2}$ от 27 = 13,5; 2) $\frac{1}{4}$ от 48 =

= 12; 3) 12,5% от 32 = $\frac{1}{8}$ от 32 = 4; 4)

87,5% от 16 = 16 - 12,5% от 16 = 16 - 2 =

14; 5) $\frac{1}{2}$ от 50% = 25%; 6) пусть первоначальная стоимость товара a руб. После первого снижения он стал стоить $0,9a$, после второго снижения $-0,8 \cdot 0,9a = 0,72a$, т. е. цена понизилась на $100\% - 72\% = 28\%$.

4. 1) $a(a - 57) + 142$, при $a = 58$ это выражение равно 200; 2) 0. Подставить значения a и b в выражение последней скобки;

3) 10; 4) $\sqrt{a^2(a - b) - b^2(a - b)} = \sqrt{(a - b)^2(a + b)}$; при $a = 0,69$ и $b = 0,31$ оно равно 0,38.

5. 1) $1,28(1,28^2 - 0,72^2) - 2,56 \cdot 0,56 = 1,28(1,28 + 0,72)(1,28 - 0,72) - 2,56 \cdot 0,56 = 0$; 2) 6; 3) $8,31^2 + 9,69^2 - 8,31 \cdot 9,69 + 3 \cdot 8,31 \cdot 9,69 = (8,31 + 9,69)^2 = 18^2 = 324$; 4) $\sqrt{18^2(4^2 + 3^2)} = 90$; 5) $\sqrt[3]{100 \cdot 1,25} \times \sqrt[3]{0,05 \cdot 160} = \sqrt[3]{125 \cdot 8} = 10$; 6) $S \approx 5,75 \cdot 0,024 \approx 0,14$.

6. 1) $2^5 \cdot 5^3 \cdot 5 = (10^5) \cdot 5 = 500\,000$; 2) $\frac{(0,125 \cdot 8)^3 \cdot 8}{(4 \cdot 0,25)^7} = 8$; 3) 1;

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{-2} = 0$.

7. 1) $15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 = (18-3)(18-1) \cdot (18+1)(18+3) = (18^2-9) \times$
 $\times (18^2-1) < 18^4$; 2) $21^3 > (21-5)(21-2)(21+2)(21+5)$.

8. $(10a+b) - (a+b) = 9a$ — делится на 9.

9. $(100a+10b+c) - (100c+10b+a) = 99(a-c)$ — делится на 99.

10. 1) $-x$; 2) $-(a+3)$; 3) $(x-3)+(5-x)=2$.

11. 1) $-7x\sqrt{-x} (x < 0)$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{|a|}$.

12. 1) $-\sqrt{6y^2}$; 2) $\sqrt{7a^2}$.

13. 1) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; 2) $\frac{(b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})}{-(b-\sqrt{2})} = -(b+\sqrt{2})$;

3) $\frac{(x^{1/4})^2 - (y^{1/4})^2}{x^{1/4} + y^{1/4}} = x^{1/4} - y^{1/4}$; 4) $x^{1/12} + y^{1/12}$.

14. 1) $\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = 1$; 2) 14.

15. 1) $x \neq -1$; иногда отвечают: x — любое число, забывая, что знаменатель не должен равняться нулю; 2) $x > 0$ и $x \neq 1$; 3) $|y| = 2$; $y_1 = -2$; $y_2 = 2$; 4) $|x| = -5$ — нет решений ($\emptyset$); 5) $|x+2| = 5$, $x_1 = 3$; $x_2 = -7$; 6) $x > 0$; 7) $x = 0$; 8) $x = 1$; 9) $x_1 = 0$; $x_2 = 10$; 10) $x = -2$ (2 не подходит, ибо $(2-2)^0$ не имеет смысла).

16. 1) $x \neq 0$; 2) x — любое действительное число; 3) нет решения: $\emptyset$; 4) $x = 0$; 5) $x^2 - 9 > 0$, $(x-3)(x+3) > 0$; $x < -3$ или $x > 3$. Другой способ: $|x| > 3$; $x > 3$ или $x < -3$; 6) $|x| < 2$; $-2 < x < 2$; 7) $x > -1$; $x \neq 2$; 8) $\cos 2$ (косинус двух радиан) отрицателен, поэтому $x - 2 < 0$; $x < 2$; 9) $\lg 0,8 < 0$; $x > 0,5$; 10) $x < 0$; 11) значение $x < 0$ не пригодно; $x > 0$, поэтому $(\sqrt{x})^2 > x^2$; $x^2 - x < 0$; $0 < x < 1$. Ответы]0; 1[; 12)]-2; 0[; 13)]-∞; 0[.

17. 1) Прибавив ко всем частям неравенства по -5 , получим $-7 < -x \leq 3$; умножив затем на (-1) , найдем $-3 \leq x \leq 7$; 2) $-7 < -2x < 10$; $-5 < x \leq 3,5$.

18. 1) $a_n = 3n$, где $1 \leq n \leq 6$ (члены последовательности — натуральные числа, кратные трем); 2) $a_n = 4n - 1$, где $1 \leq n \leq 5$; 3) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ (знаменатель — натуральная степень двух, числитель на единицу меньше знаменателя).

19. 1) $d = b - a$; $a_3 = b + (b - a) = 2b - a$; $a_4 = (2b - a) + (b - a) = 3b - 2a$; 2) $q = \frac{b}{a}$; $a_3 = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}$; $a_4 = \frac{b^3}{a^2}$; 3) $d = a_3 - a_2$, $a_1 = a_2 - d = a_2 - (a_3 - a_2) = 2a_2 - a_3$; 4) $q = \frac{a_3}{a_2}$; $a_1 = a_2 : q = a_2 : \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2^2}{a_3}$.

20. 1) $2^x : 1 = 2^x$, $2 = 2a$; 2) $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{a}$; 3) $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{a}{4}$; 4) $2^{3x} = (2^x)^3 = a^3$.

21. 1) $3x^{0,8+0,1+1,1} = 3x^2$, это выражение при $x=12$ равно 432. 2) $3^{1/2} \cdot 27^{1/6} = 3^{1/2} (3^3)^{1/6} = 3$.

22. 1) $x < 0$; 2) $x < 1$; 3) $x \neq 0$; 4) $x > 0$; $x \neq 1$; 5) $\lg x > 0$; $x > 1$; 6) $x > 0$; 7) $x > 0$; $x \neq 10$.

23. 1) $10^{\lg 8} \cdot 10^1 = 80$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $10^2 (\lg 5 + 1) = (10^{\lg 5})^2 10^2 = 2500$.

24. 1) $5 = 10^{\lg 5}$; $3,5 = 10^{\lg 3,5}$; 3) $0,7 = 10^{\lg 0,7}$.

25. 1) Заменяя 7 на $10^{\lg 7}$, получим $(10^{\lg 7})^{\frac{1}{\lg 7}} = 10$;

2) $(10^{\lg x})^{\lg x} = 10$.

26. $0 < \sin \alpha < 1$; $\lg \sin \alpha < 0$.

27. Да. Разность равна 1.

28. 1) $\lg 8 < \lg 9$; 2) $\frac{1}{2} (\lg 10 + \lg 8) = \lg \sqrt{80}$; $2 \lg 9 - 1 =$
 $= \lg \frac{81}{10} = \lg 8,1$; $\lg \sqrt{80} > \lg 8,1$ ($\sqrt{80} \approx 8,9$); 3) $\lg 0,5 > \lg \frac{4}{\sqrt{65}}$ ($\sqrt{65} > 8$).

29. 1) $x^2 = 10$ или $x^2 = 0,1$, откуда $x = \pm \sqrt{10}$ или $x = \pm \sqrt{0,1}$;
 2) $2x^2 = 18$, $x = 3$ ($x = -3$ не подходит); 3) $x = \sqrt[a]{a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

30. $\sin \alpha < \lg \alpha$.

31. $\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$.

32. 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ)$; наибольшее значение $\sin(x + 45^\circ) = 1$, наименьшее равно -1 . Следовательно, наибольшее значение данной функции $y_{\max} = \sqrt{2}$, наименьшее $y_{\min} = -\sqrt{2}$;

2) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y_{\max} = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin x + \sqrt{3} \times$
 $\times \cos x = \sin x + \operatorname{tg} 60^\circ \cos x = \sin x + \frac{\sin 60^\circ \cos x}{\cos 60^\circ} = 2 \sin(60^\circ + x)$; $y_{\max} =$
 $= 2$, $y_{\min} = -2$.

33. Нет. Сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух, поэтому $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha > 2$ (см. 77.3).

34. 1) $\lg \cos 0 = 0$; 2) $\lg \cos \pi$ не имеет смысла, так как $\cos \pi < 0$;
 3) $\sin \frac{\pi}{3} < 1$, $\lg \sin \frac{\pi}{3} < 0$, данное выражение не имеет смысла;
 4) $\operatorname{tg} 50^\circ > 1$, данное выражение имеет смысл.

35. 1) Нет, ибо если это равенство было бы истинным, тогда выражение в скобках, т. е. $(\cos x)$, должно быть равным $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, что невозможно, ибо $\left| \frac{\pi}{2} + \pi k \right| > 1$; 2) нет. Если $\sin \alpha < 0$, то $\lg \sin \alpha$ лишается смысла, если $\sin \alpha$ — положительная правильная дробь, то $\lg \sin \alpha < 0$ и $\lg \sin \alpha \neq \sin \alpha$; если $\sin \alpha = 1$, то $\lg \sin \alpha = 0$, $0 \neq 1$.

36. 1) $\pi/3 > 1$, а $\sin 1 < 1$; $\lg_{\pi/3} \sin 1 < 0$; 2) $\pi/4 < 1$; $\operatorname{tg} 1 > 1$; $\lg_{\pi/4} \operatorname{tg} 1 < 0$; 3) $\lg_{\pi/6} \cos 1 > 0$; 4) $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\cos(\sin x)$ — косинус дуги, принадлежащей к первой отрицательной или к первой положи-

тельной четверти; в той и другой косинус — число положительное, значит, при любых x $\cos(\sin x) > 0$.

37. 1) $\lg 21^\circ \cdot \lg(90^\circ - 21^\circ) = \lg 21^\circ \cdot \lg 21^\circ = 1$; 2) $\frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$;
3) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\lg(\lg 23^\circ \cdot \operatorname{ctg} 23^\circ) = \lg 1 = 0$;
5) 0, ибо $\lg \lg 45^\circ = 0$.

38. 1) $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$;
2) уравнение не имеет решений, ибо при одном и том же значении x $\sin x$ и $\cos x$ не могут равняться единице, только в этом случае левая часть уравнения была бы равна 4; 3) нет решения, если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} < -2$; 5) при $x < 0$ левая часть уравнения не имеет смысла.

Если $x > 0$, то уравнение $\lg \sin 2x = 0$ имеет решение $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}_0$.

39. 1) В области действительных чисел $\sqrt{5x - x^2}$ имеет определенное числовое значение, если $5x - x^2 > 0$ или $x^2 - 5x < 0$, а это будет справедливо, если $0 < x < 5$; из этого отрезка надо исключить две точки $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3}{2}\pi$, ибо при этих значениях x $\lg x$ не существует; 2) интервал $-4 < x < 4$, из которого исключаются точки $-\pi$; 0, π , где $\operatorname{ctg} x$ не существует; 3) $-5 < x < -\frac{7}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

Ответ: $\left]-5; -\frac{7}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right]$.

40. 1) Выразим x через y , тогда $xy - y = x + 2$, откуда имеем $x(y - 1) = y + 2$; $x = \frac{y+2}{y-1}$, следовательно, область изменения функции $-\infty < y < 1$; $1 < y < \infty$; 2) $y = (x^2 + x) - 6 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 6 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4}$, но $0 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \infty$, поэтому $-6\frac{1}{4} < y < \infty$; 3) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ)$, $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$; 4) $y = 1 + \sin 2x$; $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

41. 1) Прямая $y = 1$ при $x \geq 2$; 2) прямая $y = x$ при $x > 0$; 3) $y = x - 1$ при $x > 1$; 4) $y = 1$, если $x > 0$, и $y = -1$, если $x < 0$; 5) $y = x^2$, если $x > 0$, и $y = -x^2$, если $x < 0$; 6) прямая $y = 1$, из которой «выколоты» точки, $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$; 7) $\lg(\cos 2\pi x) > 0$, значит, $\cos 2\pi x > 1$, но $\cos 2\pi x$ не может принимать значений, больших единицы, поэтому $\cos 2\pi x = 1$, отсюда $2\pi x = 2\pi k$, $x = k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$ ($k \in \mathbb{Z}$). График состоит из отдельных точек $x = 0$; $x = 1$; $x = 2, \dots$ на

оси OX ; 8) $y = x^{\lg x} = x^{\log_{10} x} = 10$, где $x > 0$ и $x \neq 1$. График: прямая $y = 10$, при $x > 0$, из которой «выколота» точка, $x = 1$; 10) рис. 215; 11) рис. 216.

42. 1) Рис. 217. 2) Множество решений первого неравенства — круг радиуса 4 с центром в начале координат. Множество решений второго неравенства есть полуплоскость $y \leq 2x$. Множество решений системы есть пересечение полученных множеств, т. е. полукруг (рис. 218).

43. 1) Это множество изображается кругом радиуса 3 с центром в начале координат; 2) данное множество является объединением множества точек прямой $x=3$ и прямой $y=-2$; 3) все точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $|x| \leq 2$ или $-2 \leq x \leq 2$, образуют вертикальную полосу на отрезке $[-2; 2]$. Множество точек $|y| \leq 2$ есть

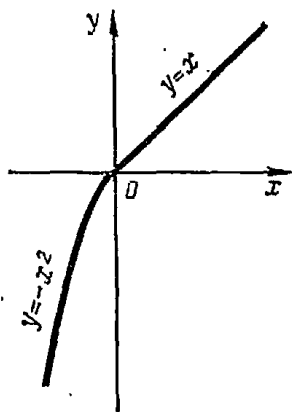


Рис. 215

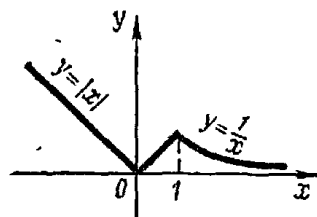


Рис. 216

горизонтальная полоса на отрезке $[-2; 2]$. Данное множество есть пересечение указанных полос, т. е. квадрат.

44. $y = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot x = x$ (см. рис. 83); $y = -x$ (см. рис. 84); $y = x + 2$ (см. рис. 85).

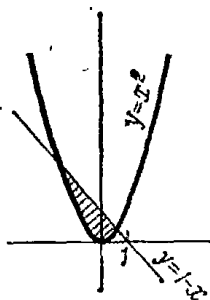


Рис. 217

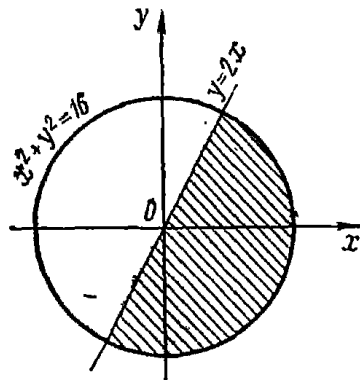


Рис. 218

$$y = \begin{cases} -2, & \text{при } x < -2 \\ x, & \text{при } -2 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{при } x > 2 \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x < 2, \\ 4, & \text{при } x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{см. рис. 87}).$$

45. Указание. $(n+1)! = n!(n+1)$.

46. 1) $x=9$; 2) $x=5$.

47. $P_4=24$.

48. 1) $C_7^4=35$; 2) $A_7^4=840$.

49. $a^2 - 4a\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$.

50. 1,5.

51. 1) $e^x (\cos x + \sin x)$; 2) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - x' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

52. $f'(x) = 2$, $g'(x) = \sqrt{2} \cos x + 1$; $2 = \sqrt{2} \cos x + 1$, $x = \pm \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

53. 1) $v(t) = t - 2$; 2) $t = 3$ с.

54. 1) $\operatorname{tg} \alpha = 1$. 2) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}/3$.

55. $f(x) = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, $f(1/2) = 2$; $f'(1/2) = -4$.

Уравнение касательной $y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$, или $y = -4x + 4$.

56. Функция убывает в промежутках $]-\infty; -1[$ и $]1; \infty[$, возрастает в промежутке $] -1; 1[$, $x = -1$ — точка минимума, $y_{\min} = -4$; $x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} = 4$.

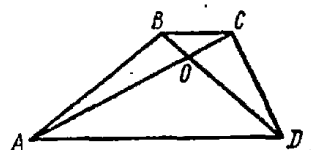


Рис. 219

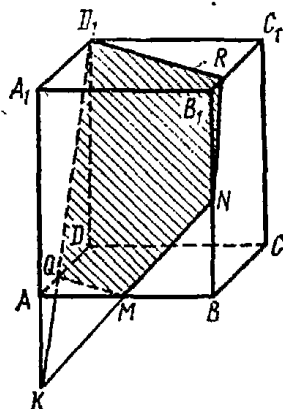


Рис. 220

57. $f(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = x^3 + x^2 + C$, $f(2) = 12 + C$, $12 + C = 3$, $C = -9$;
 $f(x) = x^3 + x^2 - 9$.

58. $S = \int_0^{\pi} 3 \sin x \, dx = -3 \cos x \Big|_0^{\pi} = 6$ кв. ед.

59. В противном случае сумма углов треугольника была бы больше 180° .

60. 1) Да; 2) нет.

61. 1) Нет; 2) может, если большее основание трапеции равно ее боковой стороне; 3) может, если меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне.

62. Это следует из того, что сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° .

63. Нет, ибо точка пересечения диагоналей трапеции не делит их пополам.

64. 4:1 (площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон).

65. Треугольники ABD и ACD , ABC и BCD , AOB и COD равновелики (рис. 219).

66. Может, если диагональ перпендикулярна основанию

67. Нет.

68. Не всегда Проекции могут совпадать.

69. Бесконечное множество

70. Может быть перпендикулярной к скрещивающейся прямой.

71. Нет. В этом случае сумма плоских углов при вершине равнялась бы 360° , а она должна быть меньше 360° .

72. Проекции всех боковых ребер такой пирамиды равны между собой, поэтому высота пирамиды проектируется в центр круга, описанного вокруг основания: 1) существуют; 2) не существует (около ромба нельзя описать окружности); 3) если только эта трапеция равнобедренная

73. 1) В середину гипотенузы; 2) в центр описанной окружности, находящийся вне треугольника.

74. У такой пирамиды высота проектируется в центр круга, вписанного в основание: 1) нет; 2) да; 3) существует, если у этой трапеции сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.

75. Указание. $K = (MN) \cap (AA_1)$; $Q = (KD_1) \cap (AD)$; $(D_1R) \parallel (QM)$ Рис. 220.

76. $\vec{0}$.

77. 1) $\vec{AA_1} \cdot \vec{AB_1} = a \cdot a \sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$; 2) $\vec{DD_1} \cdot \vec{BC} = \vec{BB_1} \cdot \vec{BC} = a \times a \cos 90^\circ = 0$; 3) $\vec{C_1D} \cdot \vec{B_1A} = a \sqrt{2} \cdot a \sqrt{2} \cos 0^\circ = 2a^2$.

78. $\vec{B_1M} = \vec{B_1B} + \vec{BM}$, $\vec{B_1B} = \vec{c}$, $\vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{BD} = \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$; $\vec{B_1M} = 1 \cdot \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$.

79. $S_{\text{сф}} = 4\pi \approx 12,6$ (дм²); $S_{\text{тетр}} = 2,5^2 \sqrt{3} \approx 10,8$ (дм²); $S_{\text{сф}} > S_{\text{тетр}}$.

80. 125: 1.

81. Радиусы шаров относятся, как 1:4. Объемы относятся, как 1:64.

Вениамин Соломонович Соломоник

**СБОРНИК
ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Научный редактор М. И. Грабарь
Редактор издательства А. И. Селнверстова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор З. А. Муслимова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ 1131

Изд. № ФМ-576. Сдано в набор 24.10.77
Подп. в печать 15.11.78. Формат 34×108¹/₁₆.
Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Объем 13,86 усл. печ. л.
14,50 уч.-изд. л. Тираж 300 000 экз.
Зак. № 647. Цена 55 коп.

Издательство «Вышая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14
Типография изд-ва «Уральский рабочий»,
Свердловск, просп. Ленина, 49,

